

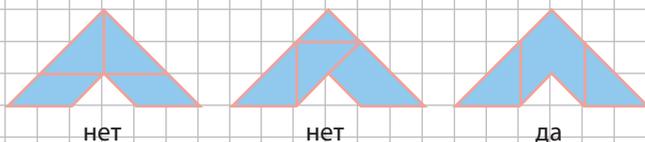
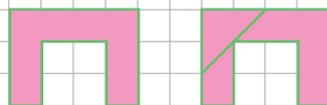
Неисчерпаемый

ТАНГРАМ

Продолжим исследовать эту головоломку и обсудим некоторые ключевые идеи, которые могут помочь в ее решении.

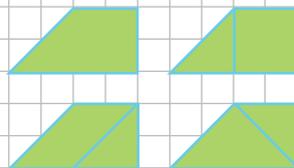
Главная идея – начинать с крупных фигур. Если понять, как расположены большие треугольники, то со средними и маленькими элементами разобраться будет значительно легче. Кстати, и в жизни так – лучше решить сначала главные вопросы, а потом уже второстепенные и мелкие.

Например, собирая из полного комплекта «букву П», можно догадаться, что большие треугольники могут располагаться только по углам. Закончите решение этой задачи, определив положение остальных элементов.

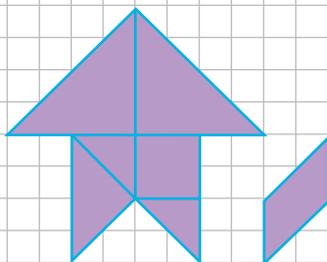


Собрать «букву Л» сложнее, поскольку расположить большие треугольники можно тремя способами, но только один из них даст решение. Завершите это решение.

Еще одна полезная идея – замена фигур внутри блока: иногда один и тот же блок можно составить из разных частей. На рисунке показано, как можно собрать прямоугольную трапецию тремя разными способами.



Это наблюдение позволяет «высвободить» нужные фигурки. Допустим, мы собираем «стрелочку», и она уже почти готова, но в конце осталась неподходящая средняя фигурка, а подходящая уже использована. В данном случае нужен средний треугольник, а он уже использован. Но средний треугольник входит в состав прямоугольной трапеции, поэтому можно произвести замену. Пользуясь этим, соберите «стрелочку» полностью.



(Продолжение следует)

КВАНТ

НОЯБРЬ
ДЕКАБРЬ

2021

№11-12

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН
Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,
М.Н.Бондаров, А.А.Варламов,
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,
А.Н.Виленкин, Н.П.Долбин,
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,
П.А.Кожевников (заместитель главного редактора), С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, А.В.Устинов, А.И.Черноуцан (заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,
А.А.Боровой, В.В.Козлов,
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

- 2 Необычное определение конических сечений.
Л.Емельянов
- 5 Атмосфера Земли и современная энергетика.
С.Гандилян

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 12 Задачи M2674–M2681, F2681–F2688
- 14 Решения задач M2662–M2665, F2669–F2672

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 19 Задачи 9–16

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 21 Задачи

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 22 Гидроудар и пробой электрокабеля.
А.Стасенко

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 24 Механизм излучения ускоренно движущегося заряда.
С.Варламов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 27 Двоичная арифметика Франческо Брунетти.
Д.Златопольский

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

- 29 Капли тумана в луче света.
О.Птушенко, В.Птушенко

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Конические сечения

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 30 Физико-математическая олимпиада «Физтех»
- 37 Новосибирский государственный университет
- 42 Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ России
- 46 Ответы, указания, решения
- 62 Напечатано в 2021 году

Вниманию наших читателей (11,20)

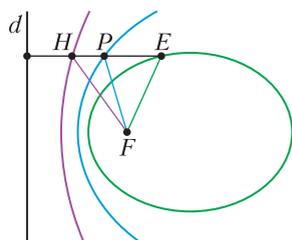
НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье Д.Златопольского*
- II *Коллекция головоломок*
- III *Шахматная страничка*
- IV *Прогулки с физикой*

Необычное определение конических сечений

Л. ЕМЕЛЬЯНОВ

КАК ИЗВЕСТНО, ТРИ КОНИЧЕСКИХ сечения – эллипс, парабола и гипербола – могут быть определены с помощью прямой d (директрисы) и точки F (фокуса), на этой прямой не лежащей (см. рисунок 1, а также «Калейдоскоп «Кванта» в этом номере). Кривая определяется



$$\frac{FE}{\rho(E, d)} = e < 1$$

$$\frac{FP}{\rho(P, d)} = e = 1$$

$$\frac{FH}{\rho(H, d)} = e > 1$$

Рис. 1

как геометрическое место точек, для которых отношение расстояния до фокуса к расстоянию до директрисы есть заданная положительная константа e (эксцентриситет). Если при этом $e < 1$, мы получим эллипс, при $e = 1$ выйдет парабола, а при $e > 1$ – гипербола. Справедливости ради надо отметить и небольшой недостаток: в этой трактовке нет места окружности (для которой $e = 0$).

Преимущество же этого подхода к определению конических сечений не только в однотипности, но и в «корректном» переходе через положение $e = 1$. Для примера возьмем определение эллипса как множества точек с фиксированной суммой расстояний до фокусов. Если зафиксировать положение двух фокусов эллипса, а эксцентриситет устремить к 1, то в качестве «вырожденного эллипса» для $e = 1$ мы получим отрезок, а не параболу. Аналогичные проблемы возникнут при переходе через положение $e = 1$ «со стороны гиперболы».

В этой статье предлагается альтернативный способ определения трех конических сечений некоторым однотипным подходом.

Рассмотрим фиксированную окружность ω радиуса R и касательную к ней l . По прямой l скользит отрезок AB постоянной длины $2a$, из концов которого проводятся вторые касательные к ω , отличные от l . Найдем геометрическое место точек пересечения этих касательных.

На рисунке 2 представлены два варианта расположения касательных CA и CB . Точка их пересечения C и есть точка, принадлежащая искомому геометрическому месту.

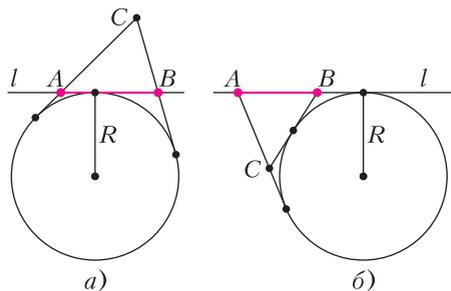


Рис. 2

ГМТ будем задавать аналитически. Для определения уравнения ГМТ рассмотрим систему координат xOy и поместим центр окружности в точку $Q(0; -R)$, прямая l будет совпадать с осью Ox , отрезок AB длины $2a$ будет скользить по Ox . В качестве параметра, определяющего расположение отрезка, выберем координату его середины – $M(t; 0)$. При этом параметр t имеет право принимать любые действительные значения, а координаты концов отрезка будут таковы: $A(t - a; 0)$ и $B(t + a; 0)$ (рис. 3).

Из геометрических соображений ясно, что в зависимости от величины отноше-

ния a/R , обозначим его через e , кривая, представляющая ГМТ, будет ограниченной или «разорвется» сходом в бесконечность.

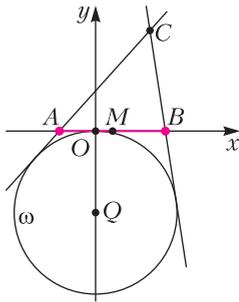


Рис. 3

Составляя уравнения касательных к окружности из точек A и B и находя их точку пересечения C , мы получим следующее параметрическое представление нашего ГМТ:

$$x = \frac{2R^2t}{t^2 + R^2 - a^2}, \quad y = \frac{2R(a^2 - t^2)}{t^2 + R^2 - a^2}. \quad (1)$$

Упражнение 1. Прodelайте соответствующие выкладки, в результате которых получаются формулы (1).

Чтобы понять тип кривой, исключим t из уравнений (1). В результате получим следующее уравнение кривой второго порядка:

$$R^2x^2 + (R^2 - a^2)y^2 + 2R(R^2 - 2a^2)y = 4R^2a^2. \quad (2)$$

Упражнение 2. Выведите (2) из (1). При этом можно воспользоваться такой схемой:

- 1) Поделив одно уравнение на другое, выразите $a^2 - t^2$ как линейную функцию от t .
- 2) Получите из одного из уравнений явное выражение для t через x, y (и параметры a и R).
- 3) Подставив выражение для t в другое уравнение, получите (2).

Теперь разберем три случая.

1. Парабола ($a = R$).

В этом случае уравнение (2) принимает вид

$$y = \frac{1}{2R}x^2 - 2R.$$

Таким образом, мы получаем параболу с фокусом $F\left(0; -\frac{3}{2}R\right)$ и директрисой d , имеющей уравнение $y = -\frac{5}{2}R$ (рис.4).

2. Эллипс ($a < R$).

Уравнение (2) имеет вид

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{(y - y_0)^2}{q^2} = 1, \quad (3)$$

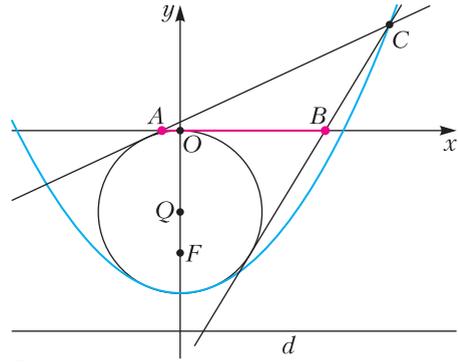


Рис. 4

где

$$p = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - a^2}}, \quad q = \frac{R^3}{R^2 - a^2},$$

$$y_0 = \frac{R(R^2 - 2a^2)}{R^2 - a^2}. \quad (4)$$

Фокусы эллипса имеют координаты

$$F_1\left(0; -R \frac{2a + R}{R + a}\right) \text{ — всегда внутри } \omega,$$

$$F_2\left(0; R \frac{2a - R}{R - a}\right) \text{ — может быть снаружи } \omega.$$

Эллипс (рис.5) вытянут по оси Oy и никогда не бывает окружностью.

Известно, что для эллипса, заданного каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

где $0 < b \leq a$, эксцентриситет опре-

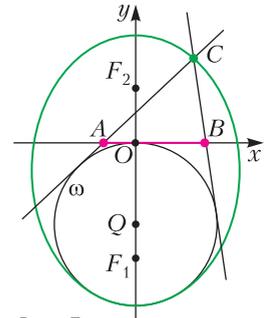


Рис. 5

деляется как $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. Тогда из формул (4) нетрудно увидеть, что отношение a/R , обозначенное нами через e , и есть эксцентриситет эллипса.

Упражнение 3. Проведите выкладку, показывающую, что $e = a/R$. (Не забудьте, что эллипс (3) вытянут по оси Oy .)

3. Гипербола ($a > R$).

Уравнение (2) принимает вид

$$-\frac{x^2}{p^2} + \frac{(y - y_0)^2}{q^2} = 1,$$

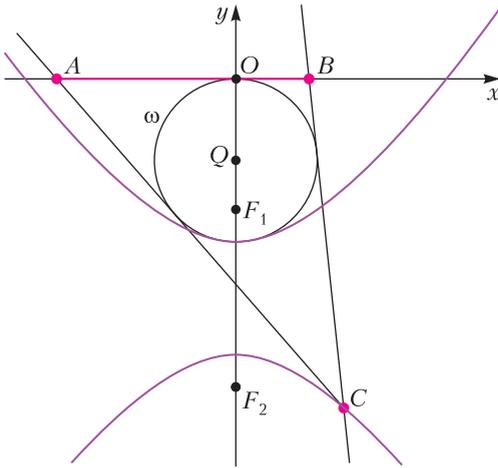


Рис. 6

где

$$p = \frac{R^2}{\sqrt{a^2 - R^2}}, \quad q = \frac{R^3}{a^2 - R^2},$$

$$y_0 = \frac{R(R^2 - 2a^2)}{R^2 - a^2}. \quad (5)$$

Фокусы гиперболы (рис.6) имеют координаты

$$F_1 \left(0; -R \frac{2a + R}{R + a} \right) - \text{внутри } \omega,$$

$$F_2 \left(0; R \frac{2a - R}{R - a} \right) - \text{всегда снаружи } \omega.$$

Упражнение 4. Убедитесь в правильности приведенных формул. Проведите выкладку, показывающую, что эксцентриситет равен $e = a/R$ и в случае гиперболы. (Используйте тот факт, что для гиперболы, заданной каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a > 0$, $b > 0$, эксцентриситет определяется как $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$.)

Попробуем подвести итоги нашей работы.

- Мы получили интересную параметризацию конических сечений дробно-рациональными функциями, при этом параметры имеют ясный геометрический смысл.

- Строго говоря, мы нашли не ГМТ, а лишь множество, содержащее это ГМТ. Но из простых геометрических соображений легко понять, что надо исключить лишь одну точку – вершину кривой, в которой происходит ее касание с окружно-

стью ω . Эта точка соответствует «бесконечно удаленному» положению отрезка.

- Что объединяет все три случая? Одна конструкция, которая при различных соотношениях двух исходных параметров R и a определяет три конических сечения.

- Эксцентриситетом во всех случаях является отношение a/R , которое мы обозначили e . Это очевидно для параболы и нетрудно проверить в случаях эллипса и гиперболы, исходя из соотношений (4) и (5), определяющих длины полуосей этих кривых.

- Также нетрудно понять, что основная окружность ω касается кривой в ее вершине, причем радиус кривизны построенного конического сечения равен в этой вершине R .

- В рассматриваемой конструкции (при заданных a и R) нетрудно построить циркулем и линейкой фокусы, директрисы, полуоси, асимптоты (для гиперболы) нашего ГМТ.

- Полученные результаты можно переформулировать и следующим образом. Построим окружность, вписанную в коническое сечение, касающуюся его в вершине и радиус которой равен радиусу кривизны кривой в этой точке. Затем проведем касательную к окружности в точке, диаметрально противоположной выбранной вершине, и на этой касательной расположим отрезок длиной, равной произведению диаметра окружности на эксцентриситет кривой. Тогда касательные к окружности в концах отрезка пересекутся на этой кривой.

Говорят, что у любого содержательного математического утверждения есть содержательный обратный факт. Давайте попробуем «развернуть» конструкцию. Представим себе, что отрезок AB неподвижен, а окружность ω перемещается, оставаясь касательной к прямой l (содержащей AB). В остальном сценарий останется прежним: из точек A и B проводим касательные к ω , находим точку их пересечения C и определяем ГМТ при всевозможных положениях окружности. Что это будет за кривая? На первый взгляд, ничего существенно не изменилось, мы просто (выражаясь физическим языком) сменили систему отсчета. Но не торопитесь с выводами. Для экспериментов прекрасно подходит среда Geogebra. Дерзайте!

Атмосфера Земли и современная энергетика

С. ГАНДИЛЯН

ПРОБЛЕМА ЗАГРЯЗНЕНИЯ ОКРУЖАЮЩЕЙ природной среды является важнейшей экологической проблемой современности как с точки зрения непосредственно загрязнения природы, так и из-за влияния повышающейся концентрации парниковых газов в атмосфере на климат Земли.

В 2021 году Нобелевская премия по физике (точнее, половина премии) была присуждена климатологам Клаусу Хассельману и Сюкуро Манабэ за «моделирование физики климата Земли, математическое описание изменчивых систем и точное предсказание глобального потепления». Манабэ был одним из первых исследователей, указавших на влияние увеличивающейся концентрации углекислого газа в атмосфере на земной климат. Он же в 1960-х годах руководил разработкой первых компьютерных физических моделей климата. Спустя примерно десять лет после первых результатов Манабэ, Клаус Хассельманн создал свою модель, связавшую воедино хаотичную и сложно предсказуемую локальную погоду и глобальный климат, а также предложил методику, позволившую доказать ключевую роль человека в происходящих сейчас быстрых климатических изменениях.

Основной вывод исследований ученых таков: на сегодняшний день определяющий вклад в обострение этой проблемы вносит современная промышленная энергетика. Помимо энергетика существенное негативное влияние на окружающую среду оказывают современная строительная индустрия, промышленные объекты разного предназначения, транспорт, сельское хозяйство и другие области жизнедеятельности человека.

Глобальное потепление: миф или реальность?

С точки зрения условий жизни человека и эволюции биосферы в целом, атмосфера Земли представляет особый интерес в двух отношениях.

Во-первых, совокупность процессов массо-, энерго- и теплопереноса, протекающих в атмосфере, а также взаимодействие атмосферы с океанами, сушей и шапками льда на полюсах Земли определяют погоду (например, в средних широтах Земли любое изменение погоды вызывается в основном атмосферными явлениями, в то время как погода в тропиках определяется взаимодействием атмосферы и океана) и климат – как устойчивую характеристику погодных особенностей отдельных континентов, климатических поясов, горных хребтов и прочих географических объектов в течение многих десятков лет. Во-вторых, химический состав атмосферы жизненно важен для человека, а также для животного и растительного мира в целом.

Эпоха научно-технического и технологического прогресса в середине XIX века ознаменовалась началом климатических изменений, связанных с повышением глобальной температуры на Земле, т.е. температуры поверхности Земли, осредненной по географическим координатам, времени суток и сезону. Глобальная температура характеризует термо-энергетическое состояние системы Земля–атмосфера в целом, так что ее изменение с годами определяет эволюционный путь теплового состояния самой планеты.

Рисунок 1 иллюстрирует, как менялась глобальная температура Земли за последние 160 лет. Начиная примерно с 1860 года – времени первых инструментальных замеров приземной температуры возду-

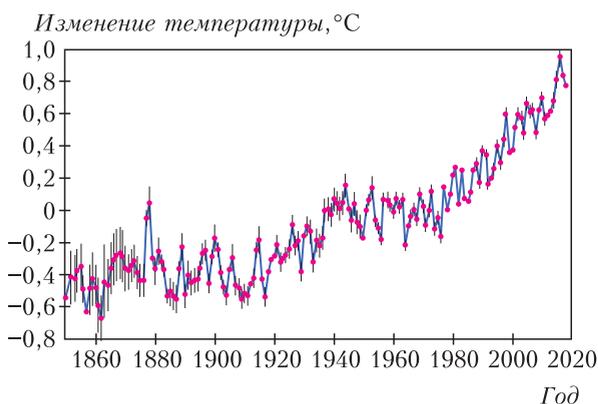


Рис. 1. График изменения глобальной температуры Земли. За ноль взята средняя температура за 1951–1980 годы

ха – вплоть до настоящего времени отмечается постепенный рост температуры на Земле. По данным Всемирной метеорологической организации, глобальное повышение температуры за период с 1860 по 2020 год составило около $\Delta T = 0,9$ °C. При этом рост температуры все эти годы шел неравномерно. Достаточно стабильный медленный подъем отмечался в 1860–1940 годах, когда температура воздуха возросла на 0,4 °C. Далее в течение 1940–1980 годов отмечался этап умеренных колебаний средних годовичных температур без какого-либо заметного тренда. За этим последовал период – с 1980 года до настоящего времени – быстрого подъема глобальной температуры, прирост которой составил еще 0,5 °C. В 1980-х – середине 1990-х годов был отмечен ряд исключительно теплых сезонов, а 1998 год оказался экстремально теплым за весь период проведения температурных измерений на Земле.

На сегодняшний день открытым остается вопрос о том, негативное изменение климата и наблюдаемое глобальное потепление обусловлено действиями человека, вызвано неподконтрольными нам силами природы или является сочетанием разных факторов. Несмотря на существование различных точек зрения на причины этого явления, сам факт глобального потепления на Земле является неоспоримым (по данным ЮНЕСКО, только за последние десять лет средняя температура на планете

повысилась на 0,3 °C). Изменение температуры воздуха вызывает развитие ряда динамических процессов в геосферных и гидросферных оболочках Земли, способных оказать как положительное, так и отрицательное воздействие на окружающую нас природную среду. С последним связано существенное снижение безопасности и рост ущерба от стихийных бедствий. Так, по расчетам американских специалистов потепление атмосферы на 1 °C может привести к усилению воздушных потоков на Атлантическом побережье США на 40–60%, что, несомненно, усугубит и без того достаточно высокую уязвимость этой территории от тропических тайфунов и ураганов.

С каждым годом все большее значение для экологии планеты приобретает тепловое загрязнение. Если до середины прошлого века промышленная деятельность человека не вызывала особой тревоги, то в последние десятилетия вторая волна усиления глобального потепления заставляет по-другому смотреть на тепловое загрязнение, ставя его на одно из первых мест среди негативных последствий человеческой хозяйственной деятельности. Промышленные объекты, в том числе и объекты производства энергоресурсов, могут быть ответственны за возникновение глобальных, региональных и локальных (местных) экологических проблем. Но основным глобальным негативным воздействием промышленной энергетики на окружающую среду считается выброс в атмосферу парниковых газов.

Масштабы современной промышленной энергетики пока еще малы в рамках природного энергетического баланса: потребление энергии человечеством составляет всего около двух десятитысячных от суммарного поступления энергии солнечного излучения, мощность которого составляет примерно $1,7 \cdot 10^{14}$ кВт. Вместе с тем, мировая промышленная энергетика соизмерима с энергией, идущей на процессы фотосинтеза органики, и по оценкам достигает около 30% от нее. А это указывает на принципиальную возможность заметного

влияния энергетики на физико-химические и оптические свойства атмосферы. И влияние это может проявиться различным образом. С одной стороны, изменение оптических свойств атмосферы может изменить обмен лучистой энергией между атмосферой и поверхностью Земли, с другой стороны, вызванное человеческой деятельностью изменение физико-химических свойств атмосферы может отразиться на состоянии биосферы, меняя к худшему условия жизни всего живого мира.

Возникает естественный вопрос: какие предельные производственные технические и технологические мощности можно использовать на поверхности Земли, не нарушая тепловой и экологический баланс биосферы?

Атмосфера и тепловой баланс системы Земля–атмосфера

Атмосферу Земли условно делят на две части: верхнюю и нижнюю. Верхние и нижние атмосферные слои взаимодействуют между собой посредством разнообразных электрофизических, газодинамических и химических процессов, образуя сложную систему, подверженную воздействиям как солнечных, так и земных глобальных энергетических процессов.

Нижняя часть атмосферы состоит из двух слоев с условными границами. Устремляясь ввысь от поверхности Земли, сначала попадаем в тропосферу, где мы живем и где идут дожди, падает снег, плавают облака, бывают бури и грозы – т.е. все, что входит в понятие погоды и климата. Тропосфера простирается до высоты 12–15 км. Выше начинается стратосфера, она имеет верхнюю границу на высоте 45–50 км, и температура стратосферы с ростом высоты падает. Здесь расположен слой с максимальной концентрацией ионов и молекул озона O_3 (на высоте 20–50 км), который защищает на Земле все живое от губительных ультрафиолетовых лучей. Между тропосферой и стратосферой имеется тонкий переходный слой, именуемый «тропопаузой».

Состав нижней атмосферы не всегда был такой, какой мы его видим сейчас. В

начальной стадии развития Земли и эволюционных процессов в биосфере атмосфера не содержала свободного кислорода: он входил в состав углекислого газа. Анализ горных пород Земли показывает, что современный состав атмосферы создали живые организмы: свободный кислород начал появляться в атмосфере примерно 1,8 млрд лет назад (возраст Земли около 4,6 млрд лет) в результате действия микроорганизмов (бактерий), перерабатывающих углекислый газ в кислород, наличие которого привело к возникновению озонового пояса. Создались условия для появления разнообразных живых организмов и растений, жизнедеятельность которых связана с переработкой под действием солнечной энергии углекислого газа атмосферы в углерод органических веществ и в кислород. Нижняя атмосфера состоит в основном из азота ($\approx 78,08\%$), кислорода ($\approx 20,9\%$), аргона ($\approx 0,9\%$) и смеси в малых количествах углекислого газа, неона, гелия, метана, криптона, которые оптически прозрачны для инфракрасного излучения.

Верхней атмосферой называют внешнюю часть газовой оболочки Земли, простирающуюся от высот порядка 50–60 км до расстояний в несколько десятков земных радиусов ($R_3 \approx 6370$ км). Верхнюю атмосферу условно подразделяют на ряд перекрывающихся слоев с нерезкими границами: мезосфера ($50 \text{ км} < R < 150 \text{ км}$), термосфера ($150 \text{ км} < R < 1000 \text{ км}$), экзосфера ($1000 \text{ км} < R < 1500 \text{ км}$), ионосфера ($1200 \text{ км} < R < 1800 \text{ км}$), плазмосфера ($1600 \text{ км} < R < 4R_3$), магнитосфера ($4R_3 < R < 30R_3$), причем три первые сферы связывают с нейтральными частицами, а три последующие – с заряженными, а именно ионами и электронами, образовавшимися в результате ионизации атомов и молекул солнечным излучением или частицами высоких энергий.

Знания о состоянии верхней атмосферы, умение прогнозировать его изменения необходимы человечеству в такой же степени, как прогноз погоды и климата, определяемых состоянием нижней атмосферы. От складывающихся в верхней атмосфере

условий в некоторых узловых областях жизнедеятельности современной цивилизации зависит очень многое, в частности – работа всевозможных систем радиосвязи, надежность линий электропередач и... даже здоровье человека. Космическую погоду нужно предсказывать не только для того, чтобы предупредить об угрозе спутникам или космонавтам. Например, интенсивные потоки заряженных частиц в ионосфере индуцируют сильные электрические токи на поверхности Земли, которые могут создать аварийные ситуации для газопроводов, систем навигации и связи, трансформаторных подстанций, высоковольтных линий электропередачи и т.д.

Чтобы оценить влияние человеческой деятельности на окружающую среду, необходимо выяснить, какие энергетические процессы происходят в атмосфере и на поверхности Земли и какое участие в них принимает или может принять человек. При этом будем учитывать некоторые эмпирические факты космического наблюдения об энергетике воздействия солнечного излучения электромагнитной энергии на систему Земля–атмосфера.

Общеизвестно, что при прохождении солнечного излучения через земную атмосферу одновременно происходят три процесса энергопреобразования:

1) отражение около 34% солнечного излучения обратно в космос (облаками и самой атмосферой);

2) поглощение около 19% солнечного излучения атмосферой, когда энергия перерабатывается атмосферой и излучается обратно в космическое пространство в виде теплового (инфракрасного) излучения;

3) пропускание около 47% солнечного излучения на поверхность Земли и отражение около 20% его обратно в космос в виде инфракрасного излучения.

В результате всего 27% солнечного излучения, поступающего на Землю из космического пространства в целом, преобразуется в энергию, которая идет

на испарение и нагрев воды, нагрев атмосферы, образование ветров, волн, течений и т.п.

Если предположить, что преобразование тепловой энергии в работу происходит в обратимых процессах, то коэффициент полезного действия η природной тепловой машины Солнце–атмосфера–Земля, рабочим телом которой является атмосфера Земли, определяется по известной формуле

$$\eta = \frac{T_C - T_3}{T_C}.$$

Здесь $T = t + 273$ – температура по шкале Кельвина, $t_C \approx 6200$ °С – средняя температура поверхности Солнца и $t_3 \approx 15$ °С – средняя температура поверхности Земли, которые выражаются в градусах Цельсия. Если в процессе прихода и ухода преобразованного солнечного излучения существующий энергетический баланс в системе Земля–атмосфера в целом не меняется, то и климат на Земле не меняется. А изменение климата происходит в результате нарушения энергетического баланса.

Из рисунка 2 видно, какую роль играет атмосфера как источник инфракрасного излучения в тепловом балансе системы Земля–атмосфера. Будем считать, что излучение и поглощение в инфракрасной части спектра происходят в нижней атмосфере высотой несколько десятков километров, где сосредоточена практически вся ее масса. Нижний и наиболее плотный

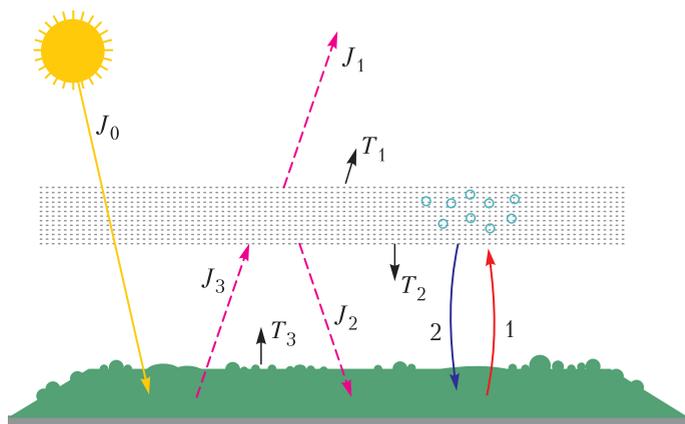


Рис. 2. Схематическая иллюстрация теплового баланса системы Земля–атмосфера

слой (тропосфера), простирающийся до высот порядка 8–10 км в высоких широтах и до 16–18 км в экваториальном поясе, содержит около 80% массы всей атмосферы и характеризуется почти линейным распределением (уменьшением) температуры с высотой. Допустим также, что тепловые потоки равномерно распределены по поверхности Земли, т.е. все основные энергетические процессы усреднены, и что в области инфракрасного спектра Земля и атмосфера излучают как абсолютно черное тело (что достаточно хорошо отражает реальность). А это излучение подчиняется закону Стефана–Больцмана: энергия, испускаемая с единицы поверхности абсолютного черного тела в единицу времени, равна $J = \sigma T^4$, где $\sigma = 5,87 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ – постоянная Стефана–Больцмана, а T – температура поверхности излучателя в кельвинах.

Условие теплового равновесия системы Земля–атмосфера выражается следующими уравнениями:

$$J_0 = J_1,$$

$$J_0 + J_2 = J_3.$$

Здесь J_0 – поток солнечного излучения, сосредоточенный в оптической части спектра и свободно проходящий через атмосферу; $J_1 = \sigma T_1^4$ – поток инфракрасного излучения атмосферы за пределы Земли, T_1 – температура верхней части излучающего слоя приповерхностного слоя атмосферы; $J_2 = \sigma T_2^4$ – поток излучения атмосферы на поверхность Земли, T_2 – температура приповерхностного слоя атмосферы; $J_3 = \sigma T_3^4$ – поток инфракрасного излучения, испускаемого поверхностью Земли, T_3 – средняя температура поверхности Земли.

Поскольку температура нижней атмосферы убывает с высотой ($T_2 > T_1$), то $J_2 > J_1$. Следует отметить, что T_1 и T_3 определяются не только радиационным излучением, как механизмом передачи тепла, но и другими процессами, главным из которых является конвективный перенос тепла из нижнего и плотного слоя атмосферы в стратосферу. Теплый воздух легче

холодного, поэтому он поднимается вверх, а холодный опускается (на рисунке 2 это стрелки 1 и 2 соответственно) – возникает конвекция. Теплый воздух несет с собой от поверхности Земли водяной пар – важный парниковый газ. Чем теплее воздух, тем больше он может «вместить» молекул воды. Поднимаясь и остывая, пар конденсируется – так формируются облака.

Из условия $J_2 > J_1$ следует, что $\sigma T_3^4 > 2J_0$, или $T_3 > 1,2(J_0/\sigma)^{1/4}$. Если представить, что атмосфера Земли отсутствует или же она оптически прозрачна в инфракрасной области спектра, то условие теплового равновесия Земли с окружающим пространством дает $J_0 = \sigma T_3^4$, т.е. $T_3 = (J_0/\sigma)^{1/4}$. Получается, что присутствие атмосферы приводит к нагреванию поверхности Земли, так как создается дополнительный поток энергии и полная мощность энергии, принимаемой поверхностью Земли, существенно превышает мощность энергии, посылаемой на Землю Солнцем. Такое явление носит название парникового эффекта. Свое название эффект получил по явлениям в теплицах, перекрытых стеклянными крышами, поскольку стекло тоже легко пропускает солнечное излучение в видимой части спектра, но задерживает инфракрасное. Однако главный эффект всех теплиц и парников в другом – в предотвращении конвективного перемешивания заполняющего их воздуха с наружным воздухом: как только открываются окна теплиц и восстанавливается связь с внешним пространством, сразу же пропадает и парниковый эффект.

Влияние загрязнения атмосферы на тепловой баланс

На сегодняшний день насущным является такой вопрос: какие предельные мощности искусственных источников тепловой энергии можно вырабатывать на поверхности Земли, не нарушая тепловой баланс системы Земля–атмосфера?

В современной научной литературе принято считать, что необратимые процессы в биосфере могут начаться после повышения средней температуры поверхности

Земли примерно на 1,5 градуса. Оценим, какие дополнительные мощности теплового излучения, выделяемые на поверхности Земли, приведут к изменению ее температуры на $\Delta T \approx 1,5$ град.

При повышении температуры поверхности Земли на величину ΔT поток инфракрасного излучения, испускаемого с поверхности Земли, определяется (согласно закону Стефана–Больцмана) по формуле

$$J_3 = \sigma(T_3 + \Delta T)^4 \approx \sigma T_3^4 \left(1 + \frac{4\Delta T}{T_3}\right).$$

Соответственно, относительное изменение потока испускаемого излучения будет равно

$$\frac{\Delta J_3}{J_3} \approx \frac{4\Delta T}{T_3}.$$

Мощность потока инфракрасного излучения, испускаемого поверхностью Земли, составляет

$$W \approx J_3 S \approx 4\pi R_3^2 J_3,$$

где $R_3 \approx 6370$ км – средний радиус Земли. Если считать, что средняя температура поверхности Земли $T_3 \approx 288$ К, то получается, что $W \approx 2,2 \cdot 10^{14}$ кВт. А значит, при появлении на Земле дополнительных источников энергии мощностью $\Delta W \approx 3,6 \cdot 10^{12}$ кВт температура поверхности Земли поднимается на $\Delta T \approx 1,5$ град.

Современная мощность энергии, вырабатываемой на Земле, достигла величины $0,5 \cdot 10^{10}$ кВт. Если сохранится рост мировой энергетики, наблюдаемый в последние десятилетия (5–7% в год), то величина ΔW будет достигнута в конце настоящего столетия. При этом следует отметить одно важное обстоятельство. Полученная оценка ΔW является справедливой, если современная энергетика не связана с процессами, происходящими при поглощении и испускании энергии Землей. Но так как эта энергетика частично вписывается в общий цикл энергетических процессов с участием Земли, то предельное значение вырабатываемой мощности значительно выше приведенной оценки.

Один из наиболее возможных путей воздействия человека на климат Земли может

быть связан с искусственным изменением оптических свойств нижней атмосферы. Особенность современной атмосферы Земли заключается в том, что основные ее компоненты – азот, кислород и аргон – прозрачны как в оптической, так и в инфракрасной части спектра. Поэтому излучательные и поглощательные свойства атмосферы определяются газами, которые присутствуют в атмосфере в малых количествах, и примесями.

В инфракрасной области спектра излучательные свойства атмосферы в основном обусловлены соответствующими переходами из одного энергетического состояния в другое молекул воды (H_2O), углекислого газа (CO_2) и озона (O_3). Атмосферный озон поглощает жесткое ультрафиолетовое излучение с частотой больше 10^{15} Гц, которое, как мы знаем, пагубно действует на живые организмы. Кроме того, атмосферный озон частично поглощает солнечное излучение в ультрафиолетовой и оптической областях спектра, тем самым обеспечивая повышение температуры в стратосфере и мезосфере (на высотах 20–30 км). Проблема атмосферного углекислого газа заключается в выяснении причин его накопления в атмосфере. Непрерывный мониторинг атмосферного углекислого газа, проводимый учеными, показывает, что концентрация молекул углекислого газа в атмосфере монотонно увеличивается (если не учитывать сезонных осцилляций).

В основном имеются два механизма для роста концентрации углекислого газа. Во-первых, в результате добычи и использования горючих ископаемых (угля, нефти, природного газа, торфа) углерод из недр Земли включается в равновесие между углекислым газом атмосферы и связанным углеродом на поверхности Земли. Тем самым, увеличивается и масса углекислого газа в атмосфере. Во-вторых, вырубание и горение лесов приводит к уменьшению скорости фотосинтеза и, соответственно, к увеличению массы углекислого газа в атмосфере.

Возникает важный вопрос: при каких концентрациях примеси это влияние станет заметным и может отразиться на теп-

ловом балансе системы Земля–атмосфера? Для оценочных расчетов будем считать, что спектр молекул, которые добавляются в атмосферу в результате человеческой деятельности, не перекрывается со спектром поглощения молекул других компонентов природной атмосферы, т.е. до введения добавки атмосфера прозрачна в той области длин волн, которые эффективно поглощает и излучает эта компонента. Появление рассматриваемой молекулярной добавки приводит к тому, что некоторая доля этого излучения поглощается атмосферой, а затем, после высвечивания возбужденных молекул, частично возвращается на поверхность Земли, т.е. увеличивается энергия, поглощаемая поверхностью Земли, и температура самой поверхности.

Оценим, какая концентрация примеси обеспечивает повышение температуры поверхности Земли на ΔT градусов. За счет примеси на поверхность Земли в единицу времени попадает энергия инфракрасного излучения, равная

$$\frac{N(x)h\omega}{2\tau},$$

где $N(x)$ – концентрация излучающих молекул примеси на высоте x рассматриваемого слоя атмосферы над поверхностью Земли, $1/\tau$ – частота высвечивания возбужденной молекулы, $h\omega$ – энергия испускаемого фотона, h – постоянная Планка, ω – частота центра зоны максимально-го излучения молекул добавки (множитель $\frac{1}{2}$ учитывает, что только половина испускаемых фотонов направляется в сторону Земли). Плотность потока дополнительного

излучения за счет примеси будет равна

$$\Delta J_3 = \frac{h\omega}{2\tau} \int_0^L N(x) dx,$$

$$N(x) = N(0) \exp\left(-\frac{h\omega}{2\tau} x\right)$$

(здесь $N(0)$ – плотность возбужденных молекул примеси у поверхности Земли, L – высота нижней атмосферы). С учетом связи относительного изменения плотности потока дополнительного излучения ΔJ_3 с полным потоком J_3 получаем

$$4J_3 \frac{\Delta T}{T_3} = \frac{h\omega}{2\tau} \int_0^L N(0) \exp\left(-\frac{h\omega}{2\tau} x\right) dx.$$

Это соотношение устанавливает связь между концентрацией молекул примеси на поверхности Земли $N(0)$ и изменением температуры поверхности ΔT , которая создается этой примесью.

Таким образом, мы видим, что состояние Земли как открытой энергосистемы сильно зависит от атмосферы. Загрязнение атмосферы человеком при современном производстве в состоянии изменить тепловой баланс системы Земля–атмосфера. Например, климат больших городов в настоящее время заметно отличается от климата окружающей его местности, что связано как с дополнительным выделением энергии, так и с изменением состава расположенной над городом атмосферы. Исследования атмосферы и климата больших городов (особенно мировых промышленных центров) позволяет установить тенденции изменения климата всей Земли под влиянием человеческой деятельности и постараться предотвратить нежелательные изменения климата.

Вниманию наших читателей

Подписаться на журнал «Квант» можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: biblio.mcsme.ru), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2674–M2677 и M2679 предлагались на XLIII Турнире городов.

Автор задач Ф2681–Ф2688 – А.Власов.

Задачи M2674–M2681, Ф2681–Ф2688

M2674. Дан отрезок $[0; 1]$. За ход разрешается разбить любой из имеющихся отрезков точкой на два новых отрезка и записать на доску произведение длин этих двух новых отрезков. Докажите, что ни в какой момент сумма чисел на доске не превысит $1/2$.

М.Лукин

M2675. В одной из клеток шахматной доски 10×10 стоит ладья. Переходя каждым ходом в соседнюю по стороне клетку, она обошла все клетки доски, побывав в каждой ровно по одному разу. Докажите, что для каждой главной диагонали доски верно следующее утверждение: в маршруте ладьи есть два последовательных хода, первым из которых она ушла с этой диагонали, а следующим – вернулась на нее.

А.Грибалко

M2676. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята такая точка P , что $\angle PDA = \angle PBA$ (рис.1). Пусть ω_1 – вневписанная окружность треугольника PAB , лежащая напротив вершины A , а ω_2 – вписанная окружность треугольника PCD . Докажите, что одна из общих касательных к ω_1 и ω_2 параллельна AD .

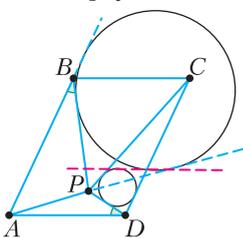


Рис. 1

Докажите, что одна из общих касательных к ω_1 и ω_2 параллельна AD .

И.Фролов

M2677. На столе в ряд лежат 20 плюшек с сахаром и 20 с корицей в произвольном порядке. Малыш и Карлсон берут их по очереди, начинает Малыш. За ход можно взять одну плюшку с любого края. Малыш хочет, чтобы ему в итоге досталось по десять плюшек каждого вида, а Карлсон пытается ему помешать. При любом ли начальном расположении плюшек Малыш может достичь своей цели, как бы ни действовал Карлсон?

А.Грибалко

M2678. Дан треугольник ABC . Пусть A' , B' , C' – середины сторон BC , CA , AB , а O_a , O_b , O_c – центры окружностей, описанных около треугольников SAC' , ABA' , BCB' соответственно (рис.2). Докажите, что треугольники ABC и $O_aO_bO_c$ подобны.

Дон Луу (Вьетнам)

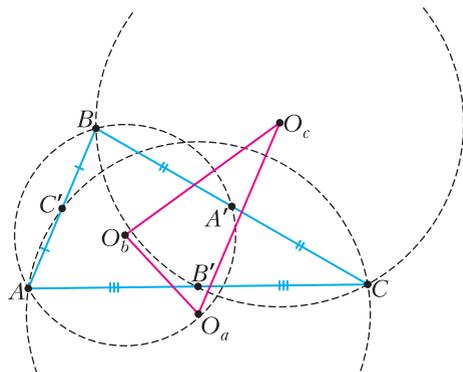


Рис. 2

M2679. На доске написано число 7. Петя и Вася по очереди приписывают к текущему числу по одной цифре, начинает Петя. Цифру можно приписать в начало числа (кроме нуля), в его конец или между любыми двумя цифрами. Побеждает тот, после чьего хода число на доске станет точным квадратом. Может ли кто-нибудь гарантированно победить, как бы ни играл соперник?

А.Грибалко

M2680. Для натурального $n > 1$ рассмотрим правильный $(2^n - 1)$ -угольник $A_0A_1A_2 \dots A_{2^n-2}$. Докажите равенство

$$\frac{1}{A_0A_1} = \frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_4} + \frac{1}{A_0A_8} + \dots + \frac{1}{A_0A_{2^n-1}}$$

Ле Хоанг, Нго Тхай (Вьетнам)

M2681. Найдите все пары положительных рациональных чисел $a < b$ такие, что $a^a = b^b$.

И.Дорофеев

Ф2681. Тонкое упругое кольцо растянуто и надето на гладкую сферу (совмещено с вертикальным экватором; рис.3). Так как состояние кольца неустойчиво, то в некоторый момент оно срывается и движется в горизонтальном направлении. Определите координату кольца в момент покидания сферы. Считайте данными следующие величины: R – радиус сферы, $R/2$ – радиус кольца в недеформированном состоянии, k_0 – коэффициент упругости единицы длины материала кольца. Сфера закреплена, гравитация отсутствует.

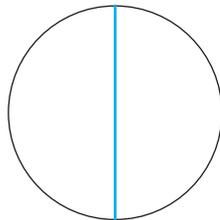


Рис. 3

Ф2682. Упругая и очень легкая пластина, имеющая на концах одинаковые маленькие грузики, уравновешена на опоре и может совершать колебания (рис.4). Оп-



Рис. 4

ределите период малых колебаний такого маятника. Считайте известными следующие величины: m – масса каждого грузика, $2l$ – длина пластины, k_0 – коэффициент упругости единицы длины пластины, g – ускорение свободного падения.

Ф2683. Правильная пирамида с квадратным основанием плавает вертикально в воде «головной вниз» (рис.5). Ось симметрии пирамиды ортогональна поверхности воды. Плотность материала пирамиды составляет $(3/4)^3$ от плотности воды. Определите угол между плоскостями противоположных граней пирамиды (угол α на рисунке), при котором плавание будет устойчивым.

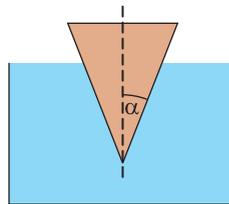


Рис. 5

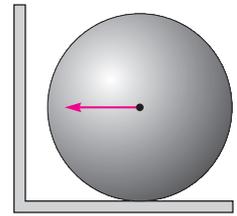


Рис. 6

Ф2684. Происходит удар шара и симметричной уголкового пластины (угла; рис.6). Перед ударом угол покоится. Шар залетает в угол, скользя по его горизонтальной стенке. Определите геометрию и кинематику (механическое состояние) системы тел после абсолютно упругого удара. Гравитации нет. Скорость шара перед ударом v_0 , масса пластины в n раз больше (меньше) массы шара. Точка удара лежит выше центра масс пластины. Толщину пластины считайте малой по сравнению с размерами ее катетов и радиусом шара.

Ф2685. В объеме шарообразного и однородного по плотности астероида происходит выделение тепла. Плотность источников тепла постоянна во всем объеме (физика выделения тепла остается космической тайной). Определите минимальный радиус астероида, при котором вещество в его центре будет находиться в жидком состоянии. Внешних источников тепла нет. Считайте известными следующие величины: плотность мощности источников q , коэф-

коэффициент теплопроводности вещества астероида λ , температура плавления T_0 , коэффициент черноты (коэффициент излучения) поверхности астероида α , постоянная Стефана-Больцмана $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$. Сделайте численный расчет для железа при $q = 1 \text{ Дж}/(\text{с} \cdot \text{м}^3)$, $\lambda = 92 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $T_0 = 1539 \text{ }^\circ\text{C}$, $\alpha = 0,9$ (железо литое, необработанное).

Ф2686. Два параллельных проводящих рельса расположены в горизонтальной плоскости и замкнуты на конденсатор (рис. 7). На рельсах, перпендикулярно им, лежит перемычка. В области пространства $x > 0$ существует однородное

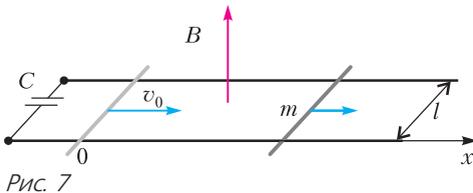


Рис. 7

магнитное поле, перпендикулярное плоскости системы. В начальный момент времени перемычке, которая находится в начале системы координат (вблизи границы магнитного поля), сообщается горизонтальная скорость v_0 . Определите характер движения перемычки в магнитном поле. Дополнительные данные: B – индукция магнитного поля, m – масса перемычки, l – расстояние между рельсами, C – емкость конденсатора. Сопротивление перемычки и рельсов равно нулю. Трения в системе нет.

Ф2687. Сжатая пружина стоит на столе (рис. 8). После пережигания нити, которая фиксирует пружину в сжатом состоянии, пружина распрямляется и подпрыгивает над столом. Определите время взаимодействия пружины с поверхностью стола, высоту, на которую «взлетает» центр масс пружины, и энергию, которая остается в пружине в виде энергии колебаний. Масса пружины m , ее коэффициент упругости k , величина начальной деформации ΔL – извест-

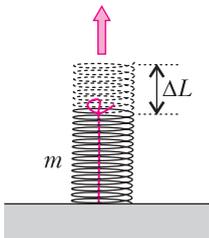


Рис. 8

ные величины. Решите задачу при выполнении соотношения $k\Delta L \gg mg$.

Ф2688. Передняя стенка аквариума является собирающей линзой, задняя стенка – зеркало. Аквариум полностью залит водой. Перед передней стенкой стоит зажженная свеча (рис. 9). Найдите полную



Рис. 9

информацию об изображении свечи в данной необычной оптической системе. Считайте известными следующие величины: F – фокусное расстояние линзы, $L = 4F$ – длина аквариума (расстояние между линзой и зеркалом), $n = 4/3$ – показатель преломления воды, $d = 4/3 F$ – расстояние свечи от передней стенки аквариума. Информация об изображении должна содержать координату изображения, коэффициент увеличения, возможность получения изображения на экране.

Решения задач М2662–М2665, Ф2669–Ф2672

М2662. В параллелограмме $ABCD$ из его вершин внутрь него выпущены лучи (рис.1). Лучи, выходящие из вершин A и D , пересекаются в точке E , а лучи, выходящие из вершин B и C , – в точке F . Известно, что $\angle BAE = \angle BCF$, $\angle CDE = \angle CBF$.

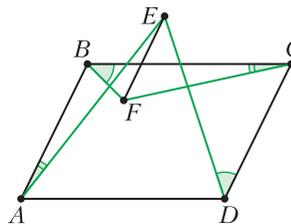


Рис. 1

Докажите, что $AB \parallel EF$.

Заметим, что $\angle AED = 180^\circ - \angle DAE - \angle ADE = \angle BAE + \angle CDE = \angle BCF + \angle CBF = 180^\circ - \angle CFB$. Получаем, что $\angle AED + \angle CFB = 180^\circ$.

Теперь параллельно перенесем треугольник AED на вектор $\overline{AB} = \overline{DC}$, при этом

он перейдет в треугольник BGC (рис.2). Из параллельного переноса следует $GE \parallel CD$. Далее, $\angle BGC = \angle AED$, откуда $\angle BGC + \angle CFB = 180^\circ$, а значит, $BGCF$ – вписанный четырехугольник. Следовательно, $\angle FGC = \angle FBC$. Отсюда $\angle FGC = \angle CDE$, а поскольку $CG \parallel DE$, имеем $GF \parallel CD$. Получается, что прямые GE и GF совпадают (и совпадают с прямой EF). Значит, $EF \parallel CD \parallel AB$, что и требовалось доказать.

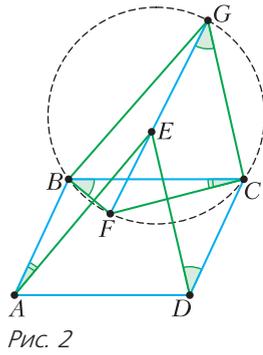


Рис. 2

В. Айзенштадт

M2663. Для каждого натурального t докажете неравенство $\left| \{\sqrt{m}\} - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{8(\sqrt{m} + 1)}$.

Пусть $[\sqrt{m}] = k$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \{\sqrt{m}\} - \frac{1}{2} \right| &= \frac{1}{2} |2k + 1 - 2\sqrt{m}| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{|4k^2 + 4k + 1 - 4m|}{2k + 1 + 2\sqrt{m}}. \end{aligned}$$

Числитель последней дроби – нечетное натуральное число и поэтому не меньше 1. Таким образом,

$$\begin{aligned} \left| \{\sqrt{m}\} - \frac{1}{2} \right| &\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k + 1 + 2\sqrt{m}} \geq \\ &\geq \frac{1}{2(4\sqrt{m} + 1)} > \frac{1}{8(\sqrt{m} + 1)}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

А. Голованов

M2664. На плоскости дана точка O . Найдите все натуральные n , для которых можно покрасить n точек плоскости в красный цвет так, чтобы для любых двух красных точек A, B нашлась третья красная точка C такая, что O лежит строго внутри треугольника ABC .

Ответ: все нечетные $n \geq 3$.

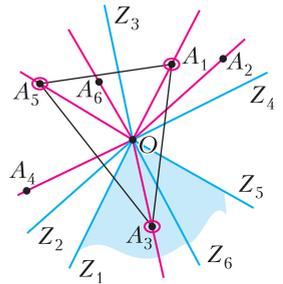
Рассмотрим n красных точек. Проведем красные лучи OA_i , где A_i – красные точки (см. рисунок). Можем считать, что все n таких лучей различны и среди них нет пары противоположных или совпадающих (иначе условие задачи очевидно нарушено – какие-то две красные точки окажутся на одной прямой с точкой O).

Далее для каждого красного луча OA_i проведем дополнительный (противоположенный) синий луч OZ_i . Итак, у нас проведено n различных прямых через точку O , и каждая прямая является объединением красного и синего лучей. Теперь условие задачи легко переформулировать так: для каждого угла Z_iOZ_j (т.е. угла между различными синими лучами) должен найтись красный луч, лежащий внутри него.

При нечетных $n \geq 3$ несложно привести пример: пусть $A_1A_2 \dots A_n$ – правильный n -угольник с центром O , тогда соответствующие синие лучи – биссектрисы углов $A_1OA_2, A_2OA_3, \dots, A_nOA_1$ и условие, очевидно, выполняется.

Докажем, что при четном $n = 2k$ условие никогда не выполняется. Предположим противное. Тогда внутри каждого из малых красных углов (внутри которых нет красных лучей) должен быть синий луч. С другой стороны, в какой-то полуплоскости относительно прямой A_1OZ_1 находятся хотя бы k красных лучей (не считая луча OA_1), а значит, не менее k малых красных углов и, следовательно, не менее k синих лучей. Но k красных лучей, противоположных этим k синим лучам, тогда находятся в противоположной полуплоскости относительно прямой A_1OZ_1 . Итак, в каждой из двух плоскостей мы обнаружили хотя бы k красных лучей, тогда всего красных лучей, считая OA_1 , не менее $2k + 1 > n$. Противоречие. Задача решена.

Можно было сразу центрально спроектировать картинку на окружность с центром



О, т.е. вместо точек A_i рассматривать точки пересечения лучей OA_i с окружностью. Условия бы при этом не менялись. Отметим, что можно решать аналогичную пространственную задачу – рассматривать множество красных точек пространства, удовлетворяющее условию: для любых трех красных точек A, B, C имеется красная точка D такая, что O лежит строго внутри тетраэдра $ABCD$. В пространственном варианте задачи ответ будет только $n = 4$. Для решения пространственной задачи конечно потребуется видоизменить многие соображения, работающие на плоскости. Например, вместо разбиения плоскости на «малые красные углы» можно рассматривать разбиение пространства на многогранные углы с вершиной O . Для удобства можно воспользоваться центральной проекцией на сферу с центром O .

П. Кожевников

M2665. Даны многочлены $f(x)$ и $g(x)$. На координатной плоскости отметили точки $A_1(f(1);g(1)), A_2(f(2);g(2)), \dots, A_n(f(n);g(n))$. Оказалось, что $A_1A_2 \dots A_n$ – правильный n -угольник. Докажите, что степень хотя бы одного из многочленов f и g не меньше чем $n - 1$.

Предположим противное.

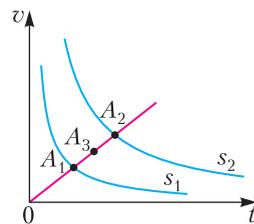
Введем комплексную плоскость. По условию, точки $z_k = f(k) + ig(k), k = 1, 2, \dots, n$, являются вершинами правильного n -угольника. Пусть z_0 – центр этого n -угольника, а $\epsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ (один из корней уравнения $x^n = 1$). Тогда выполняется равенство $(z_{k+1} - z_0) - \epsilon(z_k - z_0) = 0$ при $k = 1, 2, \dots, n - 1$.

Далее рассмотрим многочлен $p(x) = f(x) + ig(x)$ с комплексными коэффициентами, его степень равна наибольшей из степеней f и g . Тогда имеем $p(k) = z_k$ при $k = 1, 2, \dots, n$. Значит, равенство $p(x+1) - \epsilon p(x) + c = 0$, где $c = (\epsilon - 1)z_0$, выполняется при $k = 1, 2, \dots, n - 1$. Но тогда $q(x) = p(x+1) - \epsilon p(x) + c$ – многочлен степени не выше $n - 2$, у которого нашлось $n - 1$ корней, значит, q тождественно равен 0. С другой стороны, если p имеет степень

$d \geq 1$, то легко видеть, что коэффициент при x^d у многочлена $p(x+1) - \epsilon p(x) + c$ не обнулится. Таким образом, многочлен $p - \epsilon p + c$ – это константа, а значит, все точки z_k совпадают – противоречие.

В. Брагин

Ф2669. Девятиклассник Вася – большой любитель автогонок. В прошлом году Вася построил график зависимости средних скоростей автомобилей от времени прохождения дистанции s_1 (см. рисунок). В этом году соревнования проходили в другом городе, где длина трассы была s_2 . Построив второй график в тех же координатах, Вася, от нечего делать, провел прямую через начало координат, которая пересекла графики в точках A_1 и A_2 . У Васи возник вопрос: какой



должна быть длина дистанции в следующем году, чтобы третий график прошел через точку A_3 , находящуюся на середине отрезка A_1A_2 ? Попробуйте и вы ответить на этот вопрос.

Запишем уравнения графиков, изображенных на рисунке: $v_1(t) = \frac{s_1}{t}, v_2(t) = \frac{s_2}{t}, v_4(t) = \alpha t$, где α – угловой коэффициент прямой пропорциональности. Для точки A_1 получим $v_1 = \frac{s_1}{t_1} = \alpha t_1, t_1 = \sqrt{\frac{s_1}{\alpha}}$. Аналогично, для точки A_2 будет $t_2 = \sqrt{\frac{s_2}{\alpha}}$. Для точки A_3 , соответственно, $t_3 = \sqrt{\frac{s_3}{\alpha}} =$

$$= \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{s_1}{\alpha}} + \sqrt{\frac{s_2}{\alpha}} \right).$$

$$\sqrt{s_3} = \frac{\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2}}{2}, s_3 = \left(\frac{\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2}}{2} \right)^2.$$

В. Гребень

Ф2670. Сплошной однородный диск, который лежит на гладкой поверхности,

может вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр, без трения. На краю диска стоит спортсмен. Система находится в покое. Спортсмен делает один прыжок по направлению против часовой стрелки, чтобы попасть на другой край диска. Когда спортсмен приземлится на вращающийся диск, то окажется в той точке, где он прыгнул. При этом диск не успеет совершить полный оборот. Найдите отношение массы спортсмена к массе диска.

Если смотреть сверху, то картина должна выглядеть так, как показано на рисунке 1.

Пусть за время прыжка спортсмен перемещается на расстояние AB . Диск, отреагировав на толчок спортсмена, должен начать вращаться в противоположном направлении с такой скоростью, чтобы к моменту приземления спортсмена повернуться на угол $2\pi - \theta$. В этом случае спортсмен приземлится на месте, где он прыгнул. Пусть v и α – начальная скорость спортсмена и угол наклона этой скорости к горизонту соответственно, R – радиус диска. Тогда время полета $t = \frac{2v \sin \alpha}{g}$, а расстояние по горизонтали $s = vt \cos \alpha$. С другой стороны, $s = 2R \sin \frac{\theta}{2}$. Отсюда найдем время прыжка спортсмена:

$$t = \frac{2R \sin \frac{\theta}{2}}{v \cos \alpha}.$$

При толчке диск приобретает момент импульса, равный горизонтальной проекции момента импульса спортсмена:

$$I\omega = mvR \cos \alpha \cos \frac{\theta}{2}.$$

Здесь ω – угловая скорость вращения диска, $I = MR^2/2$ – момент инерции диска, M – его масса, m – масса спортсмена. По условию задачи $\omega t = 2\pi - \theta$, откуда

$$\omega = \frac{2\pi - \theta}{t}.$$

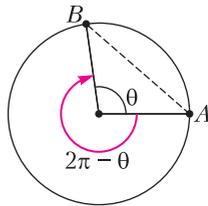


Рис. 1

Исключение $\cos \alpha$, t , R из уравнения моментов приводит к тому, что угол θ должен удовлетворять уравнению

$$\frac{2m}{M} \sin \theta + \theta = 2\pi.$$

График функции $y_1 = \frac{2m}{M} \sin \theta$ может иметь до трех точек пересечения с графиком функции $y_2 = 2\pi - \theta$ в интервале $[0; 2\pi]$. Условию задачи удовлетворяет лишь случай, изображенный на рисунке 2. Физиче-

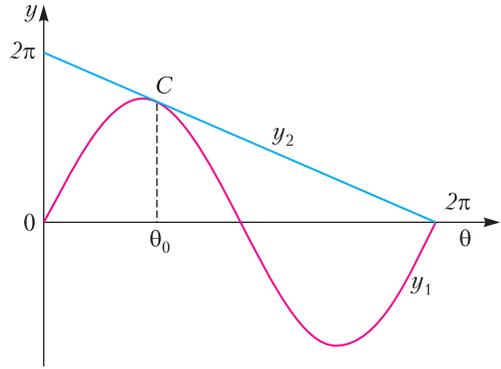


Рис. 2

еский смысл имеет только точка C , в которой график функции y_2 касается графика функции y_1 . Введем обозначение $\frac{m}{M} = \gamma$. Тогда $y_1 = 2\gamma \sin \theta$. Запишем общее уравнение касательной в виде

$$f(\theta) = f'(\theta_0)(\theta - \theta_0) + f(\theta_0) = 2\pi - \theta,$$

где θ_0 – абсцисса точки касания этой прямой к синусоиде. Известно, что $f(\theta_0) = 2\gamma \sin \theta_0$ и $f'(\theta_0) = 2\gamma \cos \theta_0$. Для точки $(0, 2\pi)$ уравнение касательной имеет вид

$$f(0) = 2\gamma(0 - \theta_0) \cos \theta_0 + 2\gamma \sin \theta_0 = 2\pi, \quad (1)$$

а для точки $(2\pi, 0)$ –

$$f(2\pi) = 2\gamma(2\pi - \theta_0) \cos \theta_0 + 2\gamma \sin \theta_0 = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) получаем

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \theta_0 - 2\pi.$$

Это – трансцендентное уравнение. Программа, составленная в среде MathCAD, дает следующий результат: абсцисса точки касания касательной к синусоиде равна $\theta_0 \approx 1,790$ рад. (Метод последовательных

приближений тоже даст такой же результат.) Тогда из уравнения (1) находим

$$\gamma = \frac{m}{M} = \frac{\pi}{-\theta_0 \cos \theta_0 + \sin \theta_0} = 2,301.$$

Б. Мукушев

Ф2671. К уединенному незаряженному конденсатору емкостью C снаружи подносят точечный заряд q , располагая его рядом с центром ближайшей пластины вдали от ее краев. Найдите напряжение на конденсаторе. Какую внешнюю силу и в какую сторону нужно прикладывать к точечному заряду, чтобы удерживать его в покое относительно неподвижного конденсатора, если дополнительно известны расстояние d между пластинами и расстояние a между точечным зарядом и ближайшей к нему пластиной?

Главное свойство проводников в электростатике заключается в том, что заряды распределяются по поверхности проводника так, чтобы поле в его толще отсутствовало. При приближении точечного заряда q к правой пластине конденсатора на ее наружной поверхности индуцируется неравномерно распределенный заряд $-q$, который в области слева от этой поверхности полностью компенсирует поле точечного заряда (см. рисунок). Поэтому точечный заряд q и этот неравномерно распределенный заряд $-q$ можно исключить из рассмотрения.

После устранения индуцированного заряда $-q$ правая пластина станет заряжена зарядом $+q$, который распределится равномерно по $+q/2$ на внутренней и наружной поверхностях, чтобы не возникло поле в толще правой пластины. Левая пластина остается незаряженной, но на ней должно произойти перераспределение заряда, чтобы компенсировать внутри нее внешнее поле, создаваемое суммарным зарядом $+q$ на правой пластине, поэтому на левой пластине индуцируются заряды $+q/2$ и $-q/2$ на наружной и внутренней поверхностях соответственно.

Заряды $+q/2$ на наружных поверхностях пластин не создают поле в области конденсатора, поэтому эти два заряда можно исключить из рассмотрения. Таким образом, остались только заряды $-q/2$ и $+q/2$ на внутренних поверхностях пластин, т.е. конденсатор заряжен зарядом $q/2$ до напряжения

$$U = \frac{q}{2C}.$$

Чтобы найти силу F , воспользуемся методом изображений: индуцированный на наружной поверхности правой обкладки неравномерно распределенный заряд $-q$ создает в области справа от этой поверхности такое же поле, какое создавал бы точечный заряд $-q$, расположенный симметрично точечному заряду q относительно наружной обкладки правой пластины. По закону Кулона находим направленную влево силу притяжения, действующую на точечный заряд со стороны индуцированного заряда $-q$:

$$F_1 = \frac{kq^2}{(2a)^2}.$$

Равномерно распределенный по правой пластине суммарный заряд $+q$ отталкивает точечный заряд вправо с силой

$$F_2 = \frac{q}{2\epsilon_0 S} \cdot q = \frac{q^2}{2Cd}$$

(для нахождения площади S пластин была использована формула емкости плоского конденсатора $C = \epsilon_0 S/d$).

Левая пластина не создает поле вне себя, поэтому искомая внешняя сила должна противодействовать лишь векторной сумме сил F_1 и F_2 :

$$F = F_1 - F_2 = q^2 \left(\frac{k}{4a^2} - \frac{1}{2Cd} \right).$$

В рамках использованной модели $S \gg a^2$, т.е. $F_1 \gg F_2$, поэтому сила F направлена от конденсатора.

С. Крюков

Ф2672. Если по обе стороны тонкой линзы находятся вещества с различными оптическими плотностями, причем меньшими, чем у материала, из которого изготовлена линза, то фокусные расстояния не будут равными. Например, линзу

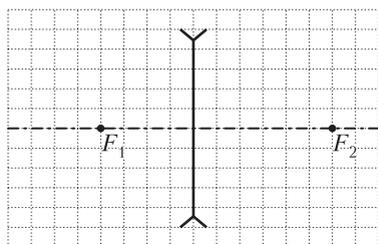


Рис. 1

можно вмонтировать в боковую стенку аквариума с водой. При этом собирающая линза останется собирающей, а рассеивающая – рассеивающей. Определите, с какой стороны линзы, показанной на рисунке 1, находится оптически более плотная среда.

Поместим перед линзой точечный источник S , например как на рисунке 2, и построим его изображение. Первый луч направим параллельно главной оптической оси. После преломления в линзе его продолжение пройдет через передний фокус F_1 . Второй луч направим на задний фокус F_2 линзы. После преломления он пройдет параллель-

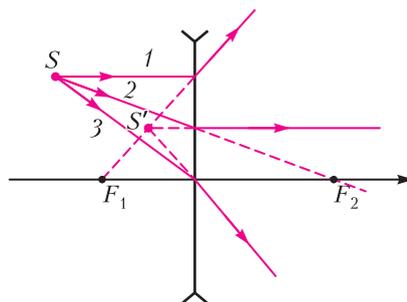


Рис. 2

но главной оптической оси. Продолжения преломленных лучей дадут нам положение мнимого изображения источника S' . Третий луч направим в оптический центр линзы. Продолжение преломленного луча должно пройти через изображение S' . Видно, что преломленный луч составляет больший угол, чем падающий. Так как центральную часть линзы можно считать частью плоскопараллельной пластины, то мы делаем вывод, что луч перешел из оптически более плотной среды в менее плотную. Значит, слева находится оптически более плотная среда.

В.Гребень

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы продолжаем конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на участников не младше 8–9 класса, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com. Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest Желаем успеха!

9. На рисунке 1 вы видите часть бесконечной решетки, составленной из правильных шестиугольников. Все вершины шестиугольников раскрасили, каждую – в черный или белый цвет. Докажите, что найдутся три одноцветные вершины, образующие равносторонний треугольник.

М.Евдокимов

10. Петя записывает 9-значные числа. На первое место (самое левое) он пишет лю-

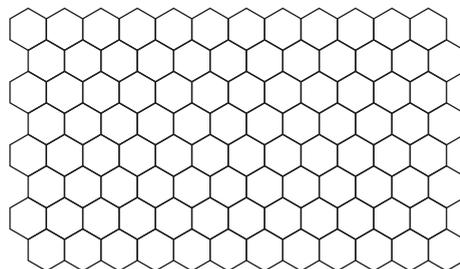


Рис. 1

бую цифру от 1 до 9, на второе место – от 1 до 8, на третье – от 1 до 7, ..., на девятое (самое правое) – цифру 1. Сколько чисел, делящихся на 7, может получить Петя?

И. Сиротовский

11. На отрезке AB отметили точку C и построили подобные треугольники по одну сторону от AB так, что $\triangle ACM \sim \triangle CBN$ ($\frac{AC}{CB} = \frac{CM}{BN} = \frac{AM}{CN}$). Докажите, что красная

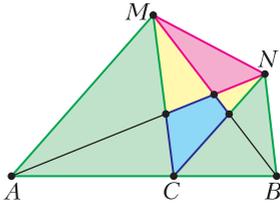


Рис. 2

и синяя части на рисунке 2 равны по площади.

В. Расторгуев

12. Имеется n кошельков. В первом лежит одна монета, во втором – две и так далее вплоть до n -го кошелька, в котором лежит n монет. За один ход разрешается выбрать два любых кошелька A и B таких, что в кошельке A больше монет, чем в кошельке B , после чего переложить из кошелька A в кошельке B столько монет, сколько в нем уже имеется. При каких n можно за несколько ходов добиться того, чтобы во всех кошельках монет стало поровну?

И. Акулич

13. Когда Робинзон Крузо попал на необитаемый остров, у него было 200 ружейных зарядов. Ради их экономии он решил каждый день тратить на охоте не более 5% имеющихся на то утро зарядов. В какой-то момент Робинзон уже не мог делать выстрелы, придерживаясь своего правила. Сколько патронов он истратил к этому моменту?

С. Дворянинов

14. При каких N большой клетчатый уголок, состоящий из трех квадратов $N \times N$, можно разрезать по линиям сетки на обычные трехклеточные уголки?

М. Евдокимов

15. Школьный турнир по настольному теннису проходил по такой системе: на каждом этапе игроки разбивались на пары и играли одну партию, на следующем этапе опять разбивались на пары и играли одну партию (пары не повторялись) и так далее. Школьник, дважды проигравший, выбывал из турнира. Если на каком-то этапе количество участников нечетно, то один проходил на следующий этап без игры. Сколько человек участвовало в турнире, если до финала, в котором должны были играть двое, было сыграно а) 29; б) 30 партий?

А. Блинков

16. На окружности отмечена 101 точка, каждая из них покрашена в синий или красный цвет. Известно, что нет пары синих точек, между которыми находится ровно 19 или 20 других точек. Какое наибольшее количество точек может быть синими?

Е. Бакаев



БИБЛИО-ГЛОБУС
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ

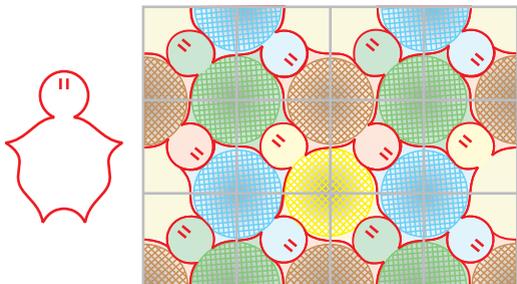
МЫ ПРЕДЛАГАЕМ
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

<p>УСЛУГИ</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Интернет-магазин www.bgshop.ru ■ Кафе ■ Клубные (дисконтные) карты и акции ■ Подарочные карты ■ Предварительные заказы на книги ■ Встречи с авторами ■ Читательские клубы по интересам ■ Индивидуальное обслуживание ■ Подарочная упаковка ■ Доставка книг из-за рубежа ■ Выставки-продажи 	<p>АССОРТИМЕНТ</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Книги ■ Аудиокниги ■ Антиквариат и предметы коллекционирования ■ Фильмы, музыка, игры, софт ■ Канцелярские и офисные товары ■ Цветы ■ Сувениры
--	--

г. Москва,
м. Лубянка,
м. Китай-город
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1
8 (495) 781-19-00
www.biblio-globus.ru
пн – пт 9:00 - 22:00
сб – вс 10:00 - 21:00
без перерыва на обед

Задачи

1. Если из квадратных плиток, которые отличаются только расцветкой, сложить прямоугольник 3×4 , как на рисунке, то целиком в нем поместится



6 черепашек. А сколько черепашек поместится целиком в составленном таким же образом прямоугольнике 20×21 ?

Т.Корчемкина

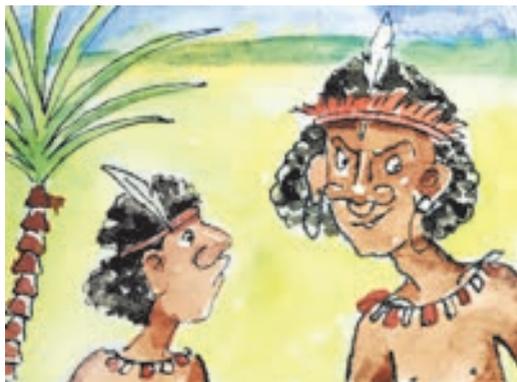
2. Докажите, что у ребуса $\frac{\text{ПЯТЬ}}{\text{ШЕСТЬ}} = \frac{5}{6}$ нет решений. (Как обычно в ребусах, одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, а разные буквы — разные цифры.)

Е.Бакаев



Задача 1 предлагалась на XLIV Турнире имени М.В.Ломоносова, задачи 2–4 предлагались на XXVI Турнире математических боев имени А.П.Савина.

3. На острове живут 100 аборигенов разного возраста. Каждый из них всегда говорит правду или всегда врет. Однажды все жители острова встали в круг, и каждый сказал, что оба его соседа старше него. Ночью нескольких аборигенов съели, а на следую-



щий день оставшиеся снова встали в круг, и каждый заявил, что оба его соседа младше него. Какое наименьшее число аборигенов могло быть съедено?

А.Грибалко

4. В клетки таблицы 6×8 нужно вписать числа 1, 2, ..., 48. Каких способов больше: тех, где в крайних клетках ровно семь простых чисел, или тех, где простых чисел на краю ровно восемь?

А.Шаповалов



Гидроудар и пробой электрокабеля

А. СТАСЕНКО

*...как в наши дни
вошел водопроед,
сработанный
еще рабами Рима.
В. Маяковский*

Увы, не умели в древности делать трубы – в результате приходилось использовать компоненту ускорения тяготения $g \sin \alpha$, т.е. удельную скатывающую силу вдоль наклонной плоскости (рис. 1). Как тут не восхититься умением мастеров создать каменное русло без щелей, да еще поднять его выше домов! Впрочем, наверняка были утечки.

Дело пошло на лад, когда начали катать трубы и использовать водонапорные башни и компрессоры для обеспечения высокого давления воды. Но тут обнаружилась другая беда – при слишком большом давлении трубы лопались. Все явления гидравлического удара объяснялись возникновением и распространением ударной волны, возникающей в результате слишком быстрого перекрытия потока.

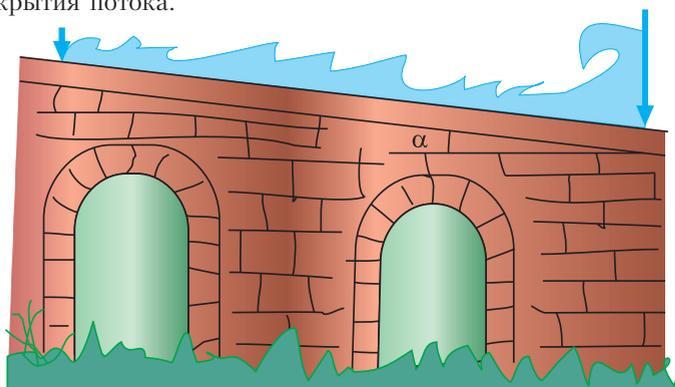


Рис. 1. Древний акведук. Перекрывая заслонку (слева), можно передать модулированный сигнал получателю (справа). При резком перекрытии заслонки может возникнуть гидроудар

Важнейшую роль в решении проблемы сыграли исследования русского ученого Николая Егоровича Жуковского (1847–1921), результаты которых изложены в его докладе «О гидравлическом ударе в водопроводных трубах»¹. Эта работа была немедленно переведена на немецкий, английский и французский языки и сделала его знаменитым задолго до того, как он был признан «отцом русской авиации». В частности, им было получено простое и практически важное выражение для перепада давлений Δp :

$$\Delta p = \rho \cdot \Delta v \cdot c, \quad (1)$$

где ρ – плотность воды, Δv – разность скоростей потока до и после внезапного изменения его сечения, c – скорость распространения возмущения с учетом сжимаемости воды и упругой деформации стенок трубы.

Но – разве вода сжимаема!? – может воскликнуть Способный Ученик. Поэтому расскажем все по порядку. Рассмотрим две ситуации.

Первая ситуация: шарик массой m , подвешенный на пружине жесткостью k , совершает малые колебания в жидкости (рис. 2,а). Пренебрегая вязкостью жидкости, запишем уравнение второго закона Ньютона:

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2s}{dt^2} = -ks, \quad (2)$$

где s – смещение шарика относительно положения равновесия. Как известно, решение этого уравнения записывается в виде гармонической функции с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Вторая ситуация: электрический контур, содержащий емкость C и индуктивность L (рис. 2,б). Уравнение, описывающее изменение во времени тока I через катушку индуктивности и заряда q на конденсаторе имеет вид

$$-L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{q}{C}. \quad (3)$$

¹ Бюллетень Политехнического Общества. – 1899, №5.

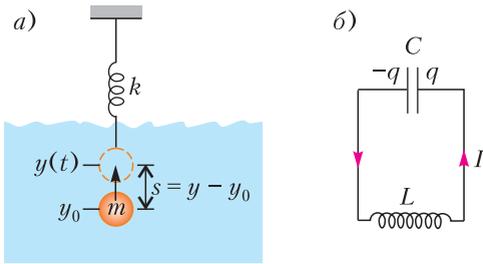


Рис. 2. Электрогидродинамическая аналогия

Это закон Кирхгофа для электрической цепи.

Сравнивая уравнения (2) и (3), можно удивиться тому, что столь различные по своей физической сути процессы описываются одинаковыми уравнениями. Тут хорошо видна явная аналогия входящих в него величин:

$$s \leftrightarrow q, v \leftrightarrow I, m \leftrightarrow L, k \leftrightarrow \frac{1}{C}.$$

Значит, можно сразу сказать, что частота колебаний тока и заряда в электрическом контуре будет равна

$$\omega = \sqrt{\frac{1/C}{L}} \leftrightarrow \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Это формула Уильяма Томсона (1824–1907), о котором будет рассказано далее.

А сейчас вообразим, что шарик раскатан в лист и свернут в трубу, которую заполнили окружающей его ранее водой, – это уже интересующий нас водопровод. А роль конденсатора и катушки выполняет кабель с центральной жилой. Теперь это устройство будет обладать распределенными по длине индуктивностью L_1 с размерностью Гн/м и емкостью C_1 с размерностью Ф/м.

Интересно, какой смысл в этом случае будет иметь выражение $\sqrt{\frac{1/C_1}{L_1}}$? Нетрудно обнаружить, что размерность этого выражения есть м/с. Но это же не что иное как скорость распространения сигнала по кабелю! Иными словами,

$$v = \sqrt{\frac{1/C_1}{L_1}}.$$

Значит, опираясь на установленную выше аналогию, можно предложить и выражение для скорости распространения сигнала в воде. Для этого нужно знаменатель в последней формуле заменить распределенной массой, а числитель – распределенной жесткостью,

т.е. плотностью воды ρ с размерностью кг/м³ и модулем упругости E с размерностью Н/м² – тем самым, который входит в известный закон Гука для упругой деформации тела.

Итак, скорость сигнала в воде равна

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Используя табличные данные, получим

$$c = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2}{10^3 \text{ кг/м}^3}} = 1400 \text{ м/с}.$$

Оценим по формуле Жуковского (1) давление при гидроударе в случае внезапного перекрытия потока воды, двигавшегося со скоростью 1 м/с:

$$\begin{aligned} \Delta p &= 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 1 \text{ м/с} \cdot 1400 \text{ м/с} = \\ &= 14 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2 \approx 14 \text{ атм}. \end{aligned}$$

Так что будьте осторожны с открытием крана на кухне! А тем более – с гидроударом в кровеносных сосудах (аналогия в медицине).

Но дело не только в определении давления гидроудара. Вот что вспоминает академик А.Н. Крылов о докладе Н.Е. Жуковского в Русском техническом обществе: «В конце 1880-х и начале 1890-х годов Н.Е. Жуковский иногда наезжал и делал в Техническом обществе свои доклады или выступал на чужих докладах. Мне особенно запомнился его доклад “Об определении места порчи в водопроводных трубах”; конечно, не тогда, когда вода бьет фонтаном до пятого этажа, нет, а когда снаружи ничего не видно. Метода Жуковского, основанная на рассмотрении записи давления после внезапного открытия клинкета, установлена блестящим математическим анализом. Эта метода тогда же была проверена опытами на московском водопроводе и вошла в практику. Любопытно сопоставить эту методику Жуковского с методом лорда Кельвина (У. Томсона) определения места порчи подводного телеграфного кабеля; математическая аналогия довольно замечательна».²

Однако мы уже реализовали это пожелание академика! Осталось написать диффе-

² Академик А.Н. Крылов. Воспоминания и очерки. – М.: Издательство АН СССР, 1956.

ренциальное уравнение в частных производных, поскольку все искомые величины (скорость смещения, упругая деформация, давление – в случае водопровода и ток, плотность заряда, разность потенциалов – в случае кабеля) зависят от двух переменных – времени и координаты. (Эти уравнения можно свести к одному, названному по вполне понятной причине «уравнением телеграфистов».) Правда, и без этих уравнений понятно, что при наличии повреждений на месте гидроудара трубопровода (говоря политкорректно, «при несанкционированном отборе») или при пробое электрокабеля на дне океана отраженный сигнал и время его появления будут сильно отличаться от безаварийного случая (рис. 3).

Любопытно сопоставить и судьбы двух великих людей – Уильям Томсон получил (1892) от королевы Виктории титул «барон Кельвин», после чего его стали называть лордом Кельвином, а профессор Н.Е. Жуковский основал (1918) знаменитый Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ), который справедливо носит имя ученого.

А вот что еще сообщает академик А.Н. Крылов: «Многие работы Жуковского имели непосредственное практическое зна-

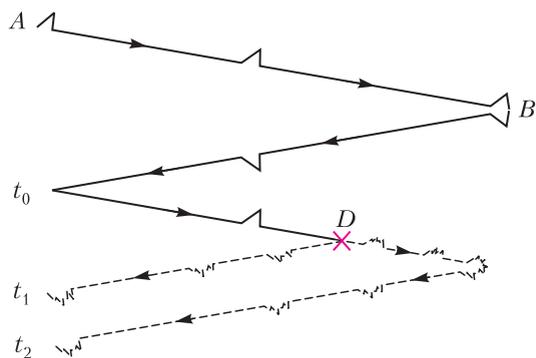


Рис. 3. Схематичное изображение распространения сигналов, посланных из A и отраженных в точке B. Вверху – в случае «здоровой» линии, внизу – испорченной в точке D; штриховые линии – искаженный сигнал

чение, и если бы он, подобно лорду Кельвину, разрабатывал их до практических деталей и брал бы патенты, то и он имел бы и свою яхту, и виллы, и замки.... Жуковский же никогда ничего не патентовал, предоставляя все свои открытия в общее пользование, видя в науке не средство для личной наживы, а средство приумножения блага для человечества...» (см. ссылку 2).

Так что, если у вас есть мысли – срочно патентуйте, господа!

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Механизм излучения ускоренно движущегося заряда

С.ВАРЛАМОВ

*Я оглянулся посмотреть,
не оглянулась ли она,
Чтоб посмотреть,
не оглянулся ли я.*

М.Леонидов

Если в некоторой инерциальной системе отсчета (ИСО) электрически заряженный

предмет движется поступательно с постоянной скоростью, то просто выбором другой ИСО можно добиться того, чтобы этот предмет находился в покое. В таком случае он (предмет) создает в пространстве вокруг себя стационарное электрическое поле (электростатическое поле). Плотность энергии этого поля остается неизменной в любом месте пространства, т.е. никаких электромагнитных волн заряженный предмет не излучает.

Когда на такой предмет подействует внешняя сила и заставит его двигаться с ускорением, электрическое поле в пространстве вокруг этого предмета будет изменяться, что приведет к появлению магнитного поля, которое, в свою очередь, тоже будет изменяться, порождая изменяющееся электрическое поле, и т.д. Эта ситуация образно отражена в известной песне со словами, вынесенными

в эпиграф. Связанные друг с другом изменения полей, возникшие в тот промежуток времени, когда заряженный предмет двигался с ускорением, «путешествуют в пространстве со временем», т.е. появляется электромагнитная волна, убегающая от предмета в разные стороны.

Мы уже выбрали ИСО, в которой до воздействия силы предмет покоился. Разумно поставить вопрос: почему действие силы на предмет не только изменяет его кинетическую энергию, которая после прекращения действия силы становится равной $mv^2/2$, но и приводит к появлению электромагнитной волны, которая тоже несет с собой энергию?

Для ответа на такой вопрос рассмотрим модельную ситуацию, в которой заряженный предмет представляет собой гантель из двух одинаковых шариков очень малых размеров, заряженных одинаковыми зарядами q и q (суммарный заряд равен $2q$) и имеющих суммарную массу m . Эти шарики соединены жестким невесомым стержнем длиной L . Сила действовала на эту конструкцию в направлении вдоль стержня и сообщала шарикам ускорение a . Время действия силы $\tau = L/c$, где c – это скорость света. Промежуток времени специально выбран таким, чтобы в течение него внешнее электрическое поле, в котором находился каждый заряженный шарик, не успело измениться.

Каждый из шариков переместился на расстояние $a\tau^2/2$, при этом один (первый) шарик приблизился к тому месту, где находился второй до момента начала действия силы, а второй шарик удалился на такое же расстояние от того места, где первоначально находился первый. Суммарная потенциальная энергия взаимодействия каждого из шариков с внешним для него полем изменилась на величину

$$\Delta E = kq^2 \left\{ \frac{1}{L + \frac{a\tau^2}{2}} - \frac{1}{L} \right\} + kq^2 \left\{ \frac{1}{L - \frac{a\tau^2}{2}} - \frac{1}{L} \right\} \approx kq^2 \frac{a^2\tau^4}{4L^3} \approx kq^2 \frac{a^2\tau}{4c^3}.$$

Если полученную энергию разделить на промежуток времени τ , то мы получим формулу, которая соответствует (по входящим в нее физическим величинам) известной формуле Лармора

$$W = \frac{2kq^2a^2}{3c^3}$$

для суммарной мощности излучения по всем направлениям, которая «уходит» от ускоренно движущегося заряда. В этой формуле ускоренно движется один заряд q и безразмерный множитель равен $2/3$.

Конечно, в модельной и очень упрощенной ситуации получить точный численный множитель было бы огромной удачей, но не точные вычисления являются целью нашего рассмотрения. Цель – показать «на пальцах», откуда берется энергия излучения и куда девается.

Продолжим наше модельное рассмотрение. Сила перестала действовать, и каждый из зарядов вновь оказался в таком же, как и до действия силы, внешнем для него электрическом поле, т.е. суммарная потенциальная энергия электростатического взаимодействия вернулась к прежнему (до силового воздействия) значению. Но энергия просто так не пропадает! Возникшая добавочная энергия не связана с зарядами, двигавшимися какое-то время ускоренно, она «оторвалась» от них и существует в виде энергии, распространяющейся в пространстве электромагнитной волны. Поскольку заряды выбраны одного знака, то поля, созданные ими, на больших расстояниях от конструкции за счет интерференции сложатся и обратно энергия уже не возвратится.

А если взглянуть на полученную формулу и заменить знак одного из зарядов на противоположный, то получится, что изменение потенциальной энергии зарядов стало отрицательным. Однако поля, созданные каждым из зарядов, теперь на большом расстоянии от конструкции за счет интерференции «погасят друг друга» и энергия возникшего изменения электромагнитного поля вернется к диполю. Иными словами, в случае, когда суммарный электрический заряд равен нулю, поле излучения на больших расстояниях от ускоренно движущейся конструкции будет отсутствовать.

Теперь вернемся к описанию поведения нашей конструкции. Она движется с уско-

рением, а внешняя сила за счет своей работы создает и кинетическую энергию предметов (шариков), и энергию поля. Это означает, что действующая на конструкцию внешняя сила по величине больше, чем ma ! Получается, что на заряды действует не только внешняя механическая сила, но и направленная навстречу ускорению сила со стороны электромагнитного поля излучения. Эту силу называют «силой радиационного торможения». Мощность силы, как известно (по определению), равна скалярному произведению силы на скорость движения точки приложения силы. В данном случае мощность, развиваемая силой радиационного торможения, действующей на заряды, отрицательна, а сила, действующая со стороны заряда на поле, положительна. Второй закон Ньютона будет иметь вид

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{внеш}} + \vec{F}_{\text{рад. торм.}}$$

Самое существенное в рассмотренной ситуации заключается в том, что для возникновения излучения заряженный и движущийся ускоренно предмет должен иметь конечный, т.е. не равный нулю, размер. И хотя этот размер L в полученную формулу для излучения и не вошел, но он сыграл свою роль, обеспечив время задержки L/c , через которое заряды, распределенные в пространстве, почувствуют произошедшие изменения поля, созданного для них другими зарядами. В частности, из этого рассмотрения и из того факта, что заряженные частицы – электроны и протоны – излучают, если движутся с ускорением, следует, что эти частицы не могут быть точечными, т.е. они как-то распределены в пространстве! Характерные размеры такого распределения могут быть очень малыми, но не равными нулю.

Сила радиационного торможения существует только в том случае, когда есть внешняя сила, обеспечивающая движение заряженного тела с ускорением. Если внешней силы нет, то нет и не может быть силы радиационного торможения. Поэтому будет некорректно записать второй закон Ньютона для движения заряженного тела в приведенном выше виде, считая, что внешняя сила просто равна нулю. Тем не менее, некоторые теоретики, написав формально такое уравнение, находят в числе возможных решений движение с увеличивающимся ускорением.

Это, конечно, неправильно. Дело в том, что при этом причину – движение с ускорением – и следствие – возникновение радиационной тормозящей силы – поменяли местами. Это противоречит логике.

Формула Лармора справедлива для излучения заряженных частиц, движущихся со скоростями, которые значительно меньше скорости света. Конечно, физики нашли формулы и для любых возможных скоростей движения частиц, но это уже другая – не школьная, а более серьезная физика.

На этом, пожалуй, и следовало бы закончить рассказ об излучении, возникающем при ускоренном движении заряженных частиц. Однако нужно помнить, что теория без решения задач «суха».

А вот и задачи:

1. Протон разгоняется, двигаясь по прямой траектории из точки с потенциалом $\varphi_0 = 0$ и с начальной нулевой скоростью в точку с потенциалом $\varphi = -10^6$ В. Оцените энергию излучения, возникшего во время этого движения. Точка старта находится от точки финиша на расстоянии $L = 1$ м. Электрическое поле однородное.

2. Электрон приближается к протону с расстояния 1 м до расстояния 10^{-10} м. Начальная скорость электрона равна нулю. Какая энергия перейдет в излучение?

3. Протон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл, причем его скорость перпендикулярна магнитному полю. Начальный радиус кривизны траектории протона $R = 1$ м. Через какое время этот радиус станет равным $R/2$?

4. Электрон влетает со скоростью $v = c/20$ в область с однородным магнитным полем с индукцией $B = 1$ Тл. Сделав половину оборота, электрон покидает эту область. На сколько уменьшилась его скорость к моменту вылета из области с магнитным полем?

Двоичная арифметика Франческо Брунетти

Д. ЗЛАТОПОЛЬСКИЙ

В 1746 году Франческо Брунетти, итальянский математик, капеллан папы римского Бенедикта XIV, опубликовал книгу «Arimmetica binomica, e diadica, in cui tutte le operazioni si fanno colle sole figure Uno, e Zero» («Арифметика биномиальная, или двоичная, в которой все операции производятся только с цифрами один и ноль»).

В книге он приводит примеры двоичных чисел и методику выполнения арифметических операций с ними (в том числе с дробями и смешанным числами).

На одной из страниц в этой книге представлена запись, связанная со сложением (рис. 1).

Запись странная, на первый взгляд – не имеющая смысла. Но это не так. Дело в том, что чуть выше Брунетти пишет: «Я думал о каком-нибудь способе сокращения количества цифр при записи больших <двоичных> чисел и пришел к выводу, что нижеследующее является наиболее подходящим способом».

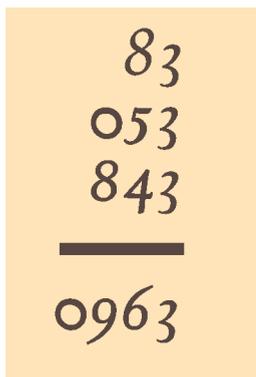
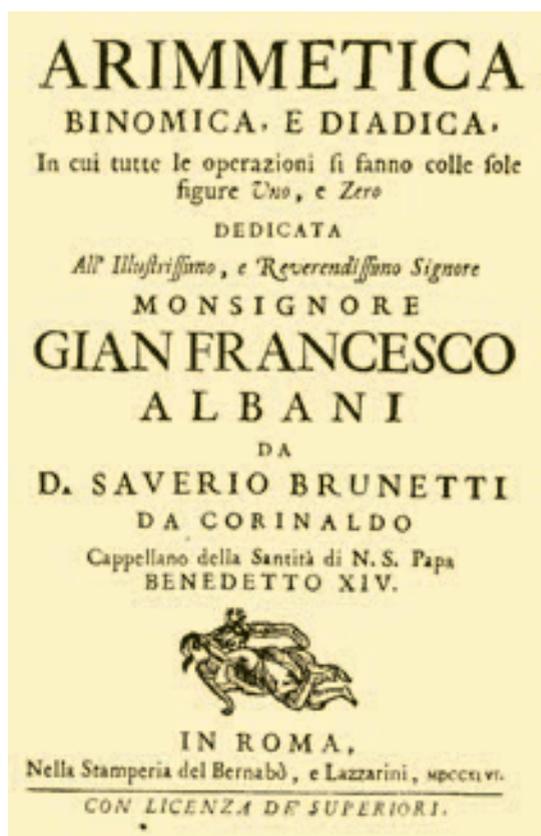


Рис. 1

(Как известно, недостатком двоичной системы счисления является большая «длина» чисел в ней.) Это «нижеследующее» заключается в том, что он предлагает записывать только номера (в виде десятичных цифр) разрядов, в которых представлены единицы (при нумерации начиная справа). Согласно этой системе, двоичное число 101000 (40_{10}) выглядит так: 64, а число 1010010 (82_{10}) – 752. Видно, что цифры записываются в порядке убывания.

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20211105>



Порядковые номера цифр, большие 9, Брунетти предлагает обозначить как их последнюю цифру (0, 1, ..., 9), записывая справа от всех таких цифр запятую (штрих), а номера, большие 19, – аналогично с двумя запятыми и т. д. В конце такой записи автор, как правило, ставит точку. Так, запись 1,50,862 соответствует двоичному числу 100000100001010100010.

Такая система записи двоичных чисел позволяет легко сравнивать их – достаточно сопоставить только первые цифры каждого числа ($6 > 54321$; $432 < 51$ и т.п.).

Вернемся к примеру сложения, показанному на рисунке 1. Согласно предложенному Брунетти способу записи двоичных чисел, речь в нем идет о сложении трех двоичных значений:

$$\begin{array}{r} 10000100 \\ 1000010100 \\ 10001100 \end{array}$$

Как проводит расчеты автор? Он оперирует не двоичными цифрами, а десятичными

значениями (порядковыми номерами единиц).

Рассмотрим сложение двух одинаковых однозначных значений. Вот соответствующая таблица сложения (убедитесь в ее справедливости!):

$$\begin{aligned} 1 + 1 &= 2 \\ 2 + 2 &= 3 \\ 3 + 3 &= 4 \\ &\dots \\ 8 + 8 &= 9 \\ 9 + 9 &= 0, \\ 0 + 0 &= 1, \\ &\dots \end{aligned}$$

При сложении все записанные по методу Брунетти числа можно выписать в одну строку. В рассматриваемом примере получим

$$830,53843.$$

Начинаем рассматривать минимальные цифры (номера). Вместо двух троек можем записать 4:

$$830,53843 \rightarrow 830,5844.$$

Вместо двух четверок – 5:

$$830,5844 \rightarrow 830,585.$$

Далее аналогично:

$$830,585 \rightarrow 830,68 \rightarrow 9360,$$

(из рисунка 1 видно, что запятой (штриха) рядом с цифрой 0 нет). Записав четыре оставшиеся цифры в порядке уменьшения, получим результат: 0,963.

Можно было также сразу записать все исходные цифры в порядке убывания – 0,8854333 («забыв» о складываемых числах) и провести аналогичные действия:

$$0,8854333 \rightarrow 0,885443 \rightarrow 0,88553 \rightarrow 0,963$$

Итак, двоичный результат сложения равен 1100100100. А вот расчеты с соответствующими двоичными числами:

$$\begin{array}{r} 10000100 \\ 1000010100 \\ \hline 10001100 \\ 1100100100 \end{array}$$

Если в слагаемых все цифры разные, то результат представляет собой последователь-

ность цифр в порядке убывания. Например,

$$63 + 71 + 54 = 765431.$$

Можно сделать вывод, что когда складываемые двоичные числа уже представлены по системе записи Брунетти, то предложенный им метод сложения будет эффективнее, чем предварительная запись двоичных слагаемых и их суммирование (конечно, при определенном навыке расчетов). Особенно этот метод эффективен при большом числе слагаемых или/и при сложении многозначных чисел. Вывод о том, является ли эффективным предложенный в XVIII веке способ сложения двоичных значений, которые надо предварительно получить из заданных десятичных чисел, предлагаем сделать читателям.

Аналогичный по сути подход использован в книге Брунетти и для вычитания, умножения и деления записанных по-особому значений двоичных чисел.

При вычитании в системе Брунетти из цифры (числа) a цифры (числа) b результат равен $(a-1)(a-2)\dots b$. Например,

$$7 - 3 = 6543; 5 - 3 = 43; 6 - 5 = 5.$$

Еще одно важное замечание. Все цифры уменьшаемого, меньшие минимальной цифры вычитаемого, «остаются» в разности.

Рассмотрим вычитание числа 853 из 0,952. Выпишем вычитаемое под уменьшаемым:

$$\begin{array}{r} 0,952 \\ 853 \end{array}$$

Как только что отмечалось, цифра 2 будет последней в искомой разности. Так как $9 - 3 = 876543$, а $0 - 8 = 98$, то разность будет равна $988765432 = 0,765432$.

Можно было также провести расчеты так: $0, - 3 = 9876543$; $9 - 8 = 8$; результат равен $988765432 = 0,765432$.

Несколько более сложный случай: $621 - 543$. Вычитаем из 6 любую цифру вычитаемого: $6 - 3 = 543$. Так как нужно еще вычесть 5 и 4 и учесть цифры 2 и 1, то искомая разность будет равна 321.

Теперь перейдем к умножению. Результатом умножения двух цифр (чисел) a и b будет $a \times b = a + b - 1$ (проверьте!).

Согласно правилам умножения в столбик, произведение «чисел Брунетти» 321 и 31 вычисляется так: $321 \times 1 = 321$; $321 \times 3 = 543$

(все цифры первого числа увеличиваются на 2). Результат равен $543321 = 621$.

Вот как компактно выглядит в книге другой пример умножения (рис. 2).

Деление в столбик по методу Брунетти, как и обычное, сводится к последовательному подбору очередной цифры, умножению на нее и вычитанию. Вот пример деления 642 на 21:

$$\begin{array}{r}
 853 \\
 92 \\
 \hline
 964 \\
 631, \\
 \hline
 631,964
 \end{array}$$

Рис. 2

- 64 при делении на 21 дает цифру 4;
- учитывая, что $21 \times 4 = 84$, вычитаем $84 - 64 = 20$;
- сносим 2 – получаем 52, которое при делении на 21 дает 2 ($4 -$ не подходит);
- $21 \times 2 = 42$;
- $52 - 42 = 10$;
- деление 10 на 21 дает последнюю цифру 2, т.е. все частное равно 432 (проверьте, поделив эти числа в десятичной системе).

В заключение заметим, что для Брунетти, как и для других ученых, описывавших двоичную систему счисления до него, эта система была абстрактным объектом исследования, не имеющим практического значения.

Капли тумана в луче света

О. ПТУШЕНКО, В. ПТУШЕНКО

Взаимодействие – это фундаментальные понятия физики. Взаимодействиями вызваны все процессы в нашем мире (кроме, разве что, равномерного прямолинейного движения) – от распадов элементарных частиц до круговорота воды в природе. Кроме того, взаимодействия играют познавательную (гносеологическую) роль: любой объект мы видим или слышим, или обнаруживаем за счет того, что он с чем-то взаимодействует. Частица, которая ни с чем не взаимодействует, была бы в принципе необнаруживаемой. Вспомним, какие сложности возникали на пути регистрации нейтрино, которое чрезвычайно слабо взаимодействует с веществом.

Впрочем, нет необходимости забираться в такие «фундаментальные выси» и разбираться в сложнейшей экспериментальной технике, чтобы оценить истинную ценность взаимодействия. Один из самых ярких примеров – и в прямом, и в переносном смысле этого слова – это взаимодействие света со взвешенными в воздухе частицами, пылинками или капельками тумана, которые рассеивают свет и делают его распространение в среде видимым, как бы «проявляют» пути

света. Но роль такого взаимодействия – обоюдная: как взвешенные частицы позволяют обнаружить луч света, так и рассеиваемый на частицах свет делает их видимыми. Если концентрация частиц не очень велика и если мы можем подобрать подходящий пространственный и временной масштабы съемки, то можно проследить за судьбой каждой из частиц, которые превращаются в луче света в светящиеся точки.

На рисунке 1 (а также на 4-й странице обложки журнала) приведена фотография, сделанная в туманный вечер с 60-миллисекундной выдержкой. Приглядитесь: несмотря на обилие микроскопических капелек в кадре, видны траектории отдельных капель! Причем траектории эти имеют примерно одинаковую длину и направление, что говорит о движении той массы воздуха, в которой эти капельки взвешены. Можно оценить и скорость этого движения – она порядка десятка сантиметров в секунду. На фоне общего движения воздушной массы видны и вариации в индивидуальных движениях капелек. Можно получить и представление о том, как меняется величина скорости или направление воздушного потока за секунды, сделав два кадра подряд. Как видно из рисунка 1, в нашем случае (когда интервал между съемками составлял одну секунду) это изменение было незначительным.

Конечно, в таком способе изучения движения частиц есть и много подводных камней. Например, по фотографии сложно оценить положение частицы по оси, перпендикуляр-

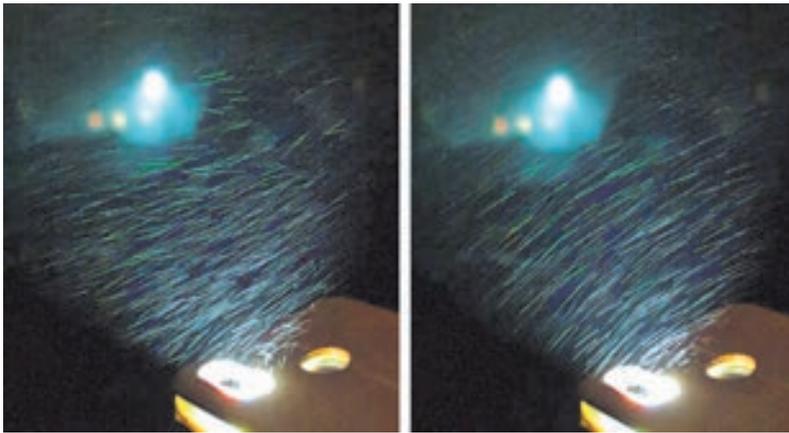


Рис. 1. Капли тумана в свете фонарика, сфотографированные с интервалом около 1 с при времени экспозиции 60 мс. Видны траектории отдельных капель



Рис. 2. Те же капли тумана, но время экспозиции теперь 8 мс

ной плоскости снимка, а значит – и ее расположение по отношению к световому конусу: только находясь внутри него, частица будет светиться. Поэтому не всегда легко понять, какую часть траектории частицы за время экспозиции мы поймали в кадр. Особенно хорошо это заметно на фотографии на рисунке 2, снятой с гораздо большим временем экспозиции: траектории уже не влезают в освещенную область, и длина их ограничивается только границами светового конуса.

Перпендикулярную плоскости снимка компоненту скорости таким простым способом тоже определить, конечно, не удастся (если только не делать одновременные снимки разными фотоаппаратами с разных сторон).

Впрочем, независимо от обсуждаемой познавательной ценности взаимодействия света с каплями тумана, у него есть и очевидная эстетическая ценность. И действительно, полет светящихся в луче фонарика капель тумана не менее красив, чем дуги, прочерчиваемые звездами на photographиях ночного неба.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Физико-математическая олимпиада «Физтех»

Математика

10 класс

Вариант 1

1. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC . Окружность с диаметром BD пересекает стороны AB и BC в точках P и T соответственно. Точки M и N – середины отрезков AD и CD соответственно. Известно, что $PM \parallel TN$.

а) Найдите угол ABC .

б) Пусть дополнительно известно, что $MP = \frac{1}{2}$, $NT = \frac{5}{2}$, $BD = 2$. Найдите площадь треугольника ABC .

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}.$$

3. На плоскости Oxy уравнением

$$26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$$

заданы координаты точки A , а уравнением

$$ax^2 + 2a^2x - ay + a^3 + 1 = 0$$

– парабола с вершиной в точке B . Найдите все значения параметра a , при которых точки A и B лежат по разные стороны от прямой $3x - y = 4$ (точки A и B не лежат на этой прямой).

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2 + y^2} + x^2 y^2 = 2, \\ x^4 + y^4 + 3x^2 y^2 = 5. \end{cases}$$

5. На плоскости с заданной прямоугольной декартовой системой координат нарисован квадрат с вершинами в точках $(0; 0)$, $(0; 59)$, $(59; 59)$ и $(59; 0)$. Найдите количество способов выбрать два узла сетки внутри этого квадрата (не включая его границу) так, чтобы хотя бы один из этих узлов лежал на одной из прямых $y = x$ или $y = 59 - x$, но оба выбранных узла не лежали ни на какой прямой, параллельной любой из координатных осей.

6. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , и при этом треугольники BOC и AOD – правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD .

а) Докажите, что ABT – правильный треугольник.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 3$, $AD = 7$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырехугольника $ABCD$.

11 класс

Вариант 1

1. (5 баллов) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3x - 2y} + \sqrt{3y - 2x} = 7, \\ (x - y)^2 = x + y + 12. \end{cases}$$

2. (6 баллов) Дан квадрат, стороны которого равны 200. Его стороны разбиты отмеченными точками на отрезки длины 1 (вершины исходного квадрата тоже отмечены). Найдите количество четверок из отмеченных точек, являющихся вершинами прямоугольников.

3. (7 баллов) Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в котором $AB = AD = 13$, $AA_1 = 16$. Точка Q лежит на диагонали BD основания $ABCD$. Внутри параллелепипеда расположены два касающихся друг друга шара разных радиусов. Центр меньшего шара лежит на отрезке $B_1 Q$. Шары касаются некоторых граней параллелепипеда так, что суммарное число точек касания граней данными шарами равно 8;

при этом больший шар касается грани $A_1 B_1 C_1 D_1$, а меньший – грани $ABB_1 A_1$.

а) Каких еще граней касается каждый шар?

б) Найдите отношение $\frac{BQ}{BD}$ и радиус меньшего шара.

4. (6 баллов) Решите уравнение

$$\sqrt{2 \cos^4 x + 3 \sin 4x - 2 \sin 2x} = -\sin 2x.$$

5. (6 баллов) Найдите все значения x , при которых неравенство

$$4 \log_{x^2+5} \left(\frac{6x}{x-2} \right) + \log_{x^2+5} (x-2)^4 \leq \leq 2^{x-p} + 2^{2+p-x}$$

выполняется для любого значения параметра p .

6. (6 баллов) Точка K – центр окружности ω , вписанной в треугольник ABC (причем $AB < BC$). Прямая BK пересекает сторону AC в точке L . Через точку K проведена прямая l , касающаяся окружности, описанной около треугольника ACK . Прямая l пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, причем $MN = 10$.

а) Найдите произведение длин отрезков AM и CN .

б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности ω равен 4, а $KL = 5$. Найдите длину отрезка AM .

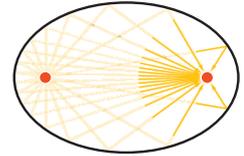
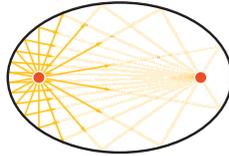
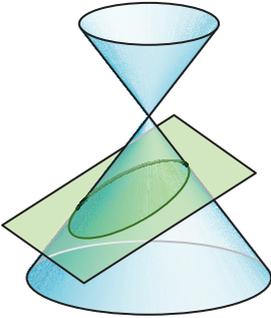
Вариант 2

1. (5 баллов) Пусть S – сумма первых 10 членов возрастающей арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, \dots , состоящей из целых чисел. Известно, что $a_6 a_{12} > S + 1$, $a_7 a_{11} < S + 17$. Укажите все возможные значения a_1 .

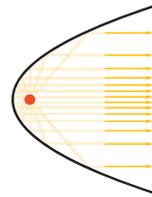
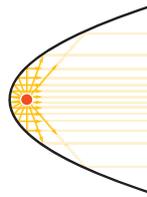
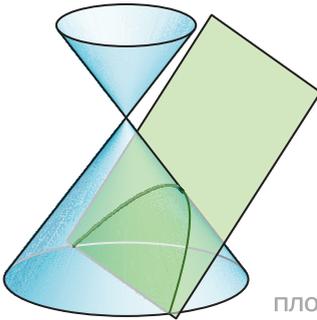
2. (5 баллов) Рассмотрим всевозможные тетраэдры $ABCD$, в которых $AB = 2$, $AC = CB = 5$, $DB = 6$. Каждый такой тетраэдр впишем в цилиндр так, чтобы все вершины оказались на его боковой поверхности, причем ребро CD было параллельно оси цилиндра. Выберем тетраэдр, для которого радиус цилиндра – наименьший из полученных. Какие значения может принимать длина CD в таком тетраэдре?

3. (7 баллов) Пусть M – фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек

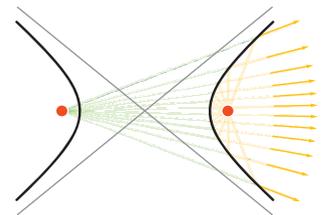
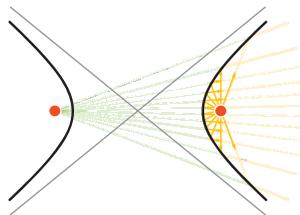
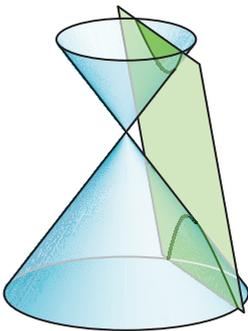
Конические сечения



плоскость пересекает все образующие конуса



плоскость параллельна ровно одной образующей



плоскость параллельна двум образующим конуса

$XF_1 + XF_2$

$$XF_1 + XF_2 = 2a$$

$$y^2 = 2px$$

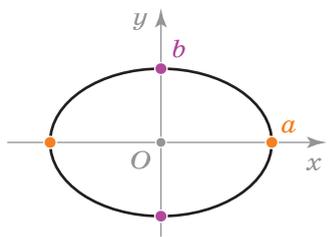


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

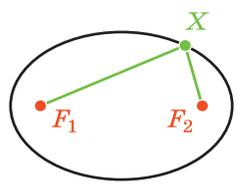


$$\frac{XF}{\rho(X, d)} = \epsilon < 1$$

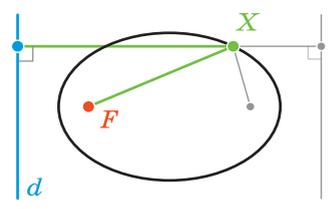
Эллипс



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

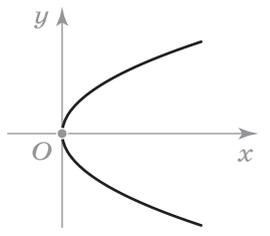


$$XF_1 + XF_2 = 2a$$

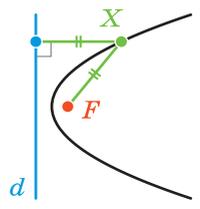


$$\frac{XF}{\rho(X, d)} = \epsilon < 1$$

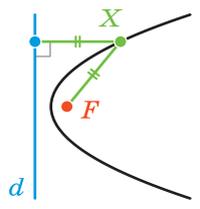
Парабола



$$y^2 = 2px$$

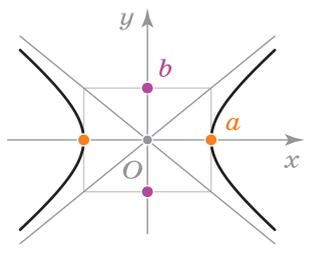


$$XF = \rho(X, d)$$

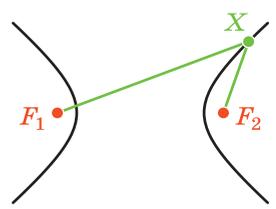


$$\frac{XF}{\rho(X, d)} = \epsilon = 1$$

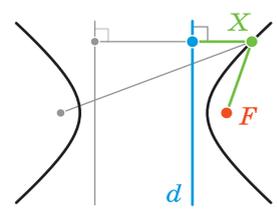
Гипербола



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$|XF_1 - XF_2| = 2a$$



$$\frac{XF}{\rho(X, d)} = \epsilon > 1$$

$$\frac{XF}{\rho(X, d)} = \epsilon > 1$$

$(x; y)$ таких, что существует пара вещественных чисел a, b , при которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 2, \\ a^2 + b^2 \leq \min(2a+2b; 2). \end{cases}$$

Найдите площадь фигуры M .

4. (5 баллов) Найдите количество троек натуральных чисел $(a; b; c)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 6, \\ \text{НОК}(a; b; c) = 2^{15} \cdot 3^{16}. \end{cases}$$

5. (5 баллов) Даны числа $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$. При каких x два из этих чисел равны, а третье меньше их на 1?

6. (7 баллов) Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O . Окружность, проходящая через точки A, O и C , пересекает отрезок BC в точке P . Касательные к ω , проведенные через точки A и C , пересекаются в точке T . Отрезок TP пересекает сторону AC в точке K . Известно, что площади треугольников APK и CPK равны 6 и 4 соответственно.

а) Найдите площадь треугольника ABC .

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC = \arctg \frac{7}{5}$. Найдите AC .

Физика

9 класс

1. Девочка бросает вертикально вверх мяч. В момент, когда мяч достиг максимальной высоты, девочка бросает вертикально вверх второй мяч с того же места и с той же скоростью, что и первый. В результате мячи столкнулись через время τ после броска второго мяча. Сопротивление воздуха не учитывайте.

1) Какой максимальной высоты, считая от места броска, достиг первый мяч?

2) На какой высоте, считая от места броска, столкнулись мячи?

3) Найдите отношение путей, пройденных мячами до столкновения.

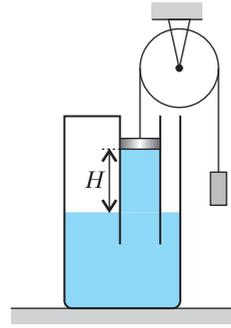


Рис. 1

2. В сосуде с водой удерживается в вертикальном положении труба, прикрепленная к сосуду (рис. 1). Поршень площадью 8 см^2 и массой 50 г , лежащий на воде, связан с грузом легкой нитью, перекинутой через блок. В результате вода поднялась на высоту $H = 10 \text{ см}$ по сравнению с уровнем воды в сосуде, и система оказалась в равновесии.

1) Найдите давление в воде непосредственно под поршнем.

2) Найдите массу груза.

3) На каком расстоянии от поверхности воды в сосуде окажется нижний край поршня, если на поршень поставить гирию массой 120 г ?

Атмосферное давление $p_0 = 100 \text{ кПа}$, плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Трением в оси блока и поршня о стенки трубы пренебречь.

3. Имеются две одинаковые лампочки накаливания. При их параллельном соединении и подключении к источнику с напряжением $U_0 = 12 \text{ В}$ на каждой лампочке выделяется мощность $P_1 = 20 \text{ Вт}$. При их последовательном соединении и подключении к тому же источнику на каждой лампочке выделяется мощность $P_2 = 6,6 \text{ Вт}$.

1) Найдите ток в каждой лампочке при параллельном соединении.

2) Найдите ток в каждой лампочке при последовательном соединении.

3) Какая мощность будет выделяться на одной лампочке при их последовательном соединении и подключении к источнику с напряжением $2U_0$?

4. Клин находится на гладкой горизонтальной поверхности стола. Гладкая поверхность клина составляет угол α ($\cos \alpha = 4/5$) с горизонтом (рис. 2). Вблизи вершины клина на высоте H удерживают небольшую по

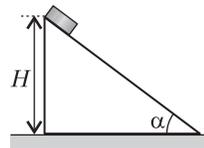


Рис. 2

размерам шайбу массой m . Масса клина $3m$.

1) За какое время шайба съедет с клина, если клин удерживать, а шайбу отпустить?

Клин и шайбу одновременно отпускают, и они разбегаются.

2) Найдите ускорение клина.

3) Через какое время шайба достигнет стола?

Направления всех движений находятся в одной вертикальной плоскости.

5. Из шланга хотят наполнить водой вкопанный в землю цилиндрический бак с вертикальной стенкой

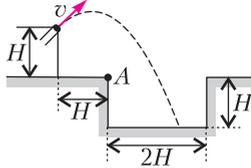


Рис. 3

высотой H и радиусом дна H (рис.3). Конец шланга находится на расстоянии H по вертикали и H по горизонтали от ближнего края бака. При выходе из шланга площадь

поперечного сечения струи S , а скорость воды $v = \sqrt{0,5gH}$. Считайте, что поперечные размеры струи при полете воды значительно меньше H . Вода в струе движется в плоскости рисунка. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

1) За какое время бак заполнится водой, если струя попадает в бак?

2) Под каким углом к горизонту должна выходить струя воды из шланга, чтобы попасть в ближнюю верхнюю точку A бака? Можно найти значение тангенса угла.

3) Под какими углами к горизонту должна выходить струя воды из шланга, чтобы попасть в бак? Можно найти диапазон изменения тангенсов углов.

Для справки: $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

10 класс

1. Мальчик бросает вертикально вверх мяч со скоростью v_0 . В момент, когда мяч достиг максимальной высоты, мальчик бросает вертикально вверх второй мяч с того же места и с той же скоростью, что и первый. В результате мячи столкнулись на некоторой высоте от места броска. Сопротивление воздуха не учитывайте.

1) Найдите время полета первого мяча до столкновения.

2) Найдите отношение времени полета первого мяча к времени полета второго мяча до столкновения.

3) На какой высоте от места броска столкнулись мячи?

2. Конический сосуд с водой и шаром, лежащим на дне сосуда, вращаются вокруг вертикальной оси OO_1 с угловой скоростью ω (рис.4). Плотность воды ρ , плотность шара ρ_0 . Радиус шара R , центр шара находится на расстоянии $1,5R$ от оси вращения. Угол между горизонтальным дном и боковой стенкой сосуда α ($\operatorname{tg} \alpha = 3/2$). Внутренняя поверхность сосуда гладкая.

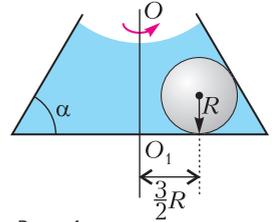


Рис. 4

1) С какой силой N_1 шар давил бы на дно, если бы сосуд не вращался?

2) Найдите силу N_2 давления шара на дно при вращении сосуда.

3. Водяной пар изотермически сжимают при температуре 81°C . Объем пара уменьшился в 7 раз и стал 1,7 л, а давление возросло в 3,6 раза. Давление насыщенного водяного пара при 81°C равно $0,5 \cdot 10^5$ Па. Пар считайте идеальным газом. Молярная масса пара $M = 18$ г/моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль · К).

1) Найдите начальное давление пара.

2) Найдите начальную массу пара.

4. На гладкой горизонтальной поверхности стола находится клин. Гладкая поверхность клина составляет угол α ($\cos \alpha = 3/5$) с горизонтом (рис.5). На вершине клина на высоте H удерживают небольшой по размерам брусок массой m . Масса клина $2m$.

1) За какое время брусок съедет с клина, если клин удерживать, а брусок отпустить?

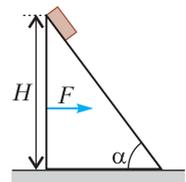


Рис. 5

На покоившийся вначале клин стали действовать с постоянной горизонтальной силой $F = mg$, а брусок отпустили. В результате клин стал двигаться поступательно по столу, а брусок – вниз по клину.

2) Найдите ускорение клина.

3) Через какое время брусок достигнет стола?

Направления всех движений происходят в одной вертикальной плоскости.

5. У идеального одноатомного газа в некотором процессе давление уменьшилось на 1%, а объем увеличился на 2%. В этом процессе относительные изменения давления, объема и температуры считайте намного меньшими единицы.

1) Как и на сколько процентов изменилась температура газа?

2) Найдите в этом процессе отношение полученного газом количества теплоты к изменению внутренней энергии газа.

11 класс

1. Клин находится на горизонтальной поверхности стола. Легкая нерастяжимая нить, перекинута через укрепленный на клине легкий блок, привязана к небольшому по

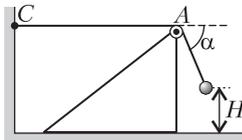


Рис. 6

размерам шару и стене (рис.6). Систему удерживают в покое, отведя шар в сторону так, что нить составляет угол α с горизонтом, участок нити CA горизонтален, шар находится на расстоянии H от стола. Затем систему отпускают, она движется, при этом угол α наклона нити к горизонту не изменяется.

1) Под каким углом к горизонту направлено ускорение шара? Найдите значение любой тригонометрической функции этого угла.

2) Найдите ускорение клина. Ответ выразите через ускорение свободного падения g .

3) Найдите отношение массы шара к массе клина.

4) Через какое время шар достигнет стола? Трением в системе пренебречь. Все точки системы перемещаются в вертикальной плоскости. Клин не переворачивается. Шар достигает стола раньше, чем клин доезжает до стены.

2. Гелий в количестве ν моль охлаждается от начальной температуры T_0 в процессе с молярной теплоемкостью, зависящей от температуры T линейно: $C(T) = 3R \frac{T}{T_0}$. Здесь R – универсальная газовая постоянная. Гелий считайте идеальным газом.

1) Какое количество теплоты Q_1 ($Q_1 > 0$) отдаст газ в таком процессе при уменьшении температуры от T_0 до $\frac{3}{5}T_0$?

2) До какой температуры надо охладить газ, чтобы он совершил минимальную работу?

3) Найдите эту минимальную работу.

3. Цепь собрана из предварительно незаряженных конденсаторов. Ключ разомкнут, режим установился (рис.7). Параметры цепи указаны на схеме, причем $C_2 = C$, $C_1 = 4C$, источник идеальный. Ключ замыкают.

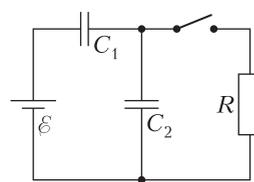


Рис. 7

режим установился (рис.7). Параметры цепи указаны на схеме, причем $C_2 = C$, $C_1 = 4C$, источник идеальный. Ключ замыкают.

1) Найдите ток через резистор сразу после замыкания ключа.

2) Какое количество теплоты выделится в цепи после замыкания ключа?

3) Найдите напряжение на резисторе после замыкания ключа в момент, когда ток через конденсатор емкостью C_1 равен I_0 .

4. По двум параллельным хорошо проводящим рельсам, находящимся в одной горизонтальной плоскости и в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией B , могут скользить без трения две перемычки (рис.8). Расстояние между рельсами L . Перемычка 1 имеет массу $2m$ и сопротивление R , у перемычки 2 масса m и сопротивление $3R$.

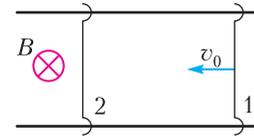


Рис. 8

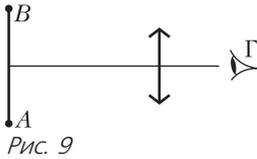
Вначале перемычки покоились. Затем перемычке 1 сообщили скорость v_0 в направлении второй перемычки. Известно, что перемычки не столкнулись. Индуктивность контура из перемычек и рельсов не учитывайте.

1) Найдите ускорение перемычки 1 в начальный момент.

2) Найдите скорость каждой перемычки через продолжительный промежуток времени.

3) Найдите расстояние между перемычками через продолжительный промежуток времени, если в начальный момент расстояние между ними было s_0 .

5. Тонкая линза с фокусным расстоянием 18 см закреплена на штативе. На стене висит небольшая круглая картина AB диаметром $H = 9$ см на расстоянии 72 см от линзы (рис.9). Наблюдатель рассматривает глазом Γ действительное изображение картины в линзе, аккомодировав глаз на расстояние 24 см. Глаз и центр картины находятся на главной оптической оси линзы.



- 1) На каком расстоянии x от линзы расположен глаз?
- 2) Найдите минимальный диаметр D_{\min} линзы, при котором наблюдатель сможет увидеть целиком все изображение картины.
- 3) На каком расстоянии от линзы и где между картиной и ее изображением в линзе

следует поместить небольшой непрозрачный экран, чтобы не видеть ни одной детали изображения?

Размерами зрачка глаза и экрана можно пренебречь по сравнению с диаметром линзы.

Публикацию по математике подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, И.Глухов, А.Головко, С.Городецкий, В.Дубинская, Н.Королев, Ю.Кузьменко, Е.Молчанов, П.Останин, О.Подлипский, С.Саулин, А.Скубачевский, Д.Терёшин; по физике – В.Чивилёв, В.Усков

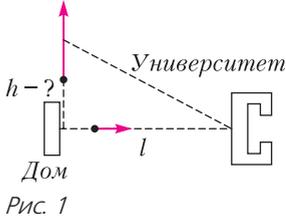
Новосибирский государственный университет

Физика

Олимпиада «Твой путь в настоящую науку»

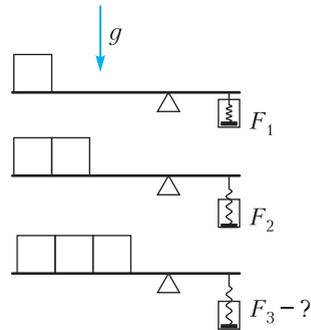
I (отборочный) этап Устный тур 8 класс

1. Таня и Петя вышли из дома в университет, расстояние до которого равно l . Скорость Пети в 2 раза превышает скорость Тани. Таня пошла по прямой, а Петя сначала прошел путь h перпендикулярно этой прямой до магазина за тетрадкой, а затем пошел по кратчайшему пути в университет (рис.1). Чему равен путь h , если Таня и Петя пришли в университет одновременно?



2. Из водоема с помощью троса медленно вытаскивают вертикально расположенный металлический столб. Когда над поверхностью оказались 25% от высоты столба, трос оборвался. Во сколько раз надо увеличить прочность троса, чтобы достать весь столб? Плотность металла 3 г/см^3 , воды 1 г/см^3 .

3. К одному концу разноплечих невесомых весов прикрепили динамометр, а вблизи противоположного конца положили кубик (рис.2). Динамометр тянут вниз так,



чтобы весы оставались в равновесии. При этом динамометр показывает силу F_1 . Когда рядом вплотную с первым кубиком положили второй точно такой же, динамометр стал показывать F_2 . Какую силу покажет динамометр, если добавить третий такой же кубик?

4. Воду в кастрюле нагревают на плите. В некоторый момент времени в кастрюлю доливают стакан холодной воды. Зависимость температуры воды от времени показана на рисунке 3. Определите температуру воды в стакане. Теплоемкостью кастрюли, а также теплообменом с окружающей средой пренебречь. Считать, что к кастрюле подводится постоянная тепловая мощность.

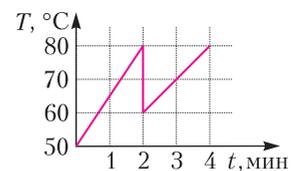


Рис. 3

9 класс

1. Велосипедист, двигаясь с постоянной скоростью вдоль проспекта, заметил, что встречные автобусы ему встречаются каждые $t_1 = 1$ мин, а попутные – обгоняют его каждые $t_2 = 5$ мин. Считая, что автобусы движутся равномерно с одинаковыми скоростями и с одинаковыми интервалами в обе стороны, определите промежуток времени t между встречами автобусов друг с другом.

2. Цилиндрический проводник находился в цилиндрическом стакане площадью S (рис.4). Стенки стакана непроводящие, дно – идеально проводящее. Проводник придавили сверху идеально проводящим поршнем того же сечения S и измерили сопротивление проводника, которое оказалось равным R_1 . Затем проводник расплавили, а поршень опустили так, что между поршнем и дном не осталось пустот. Когда проводник остыл до первоначальной температуры, снова измерили сопротивление проводника, которое оказалось равным R_2 . Чему была равна площадь сечения проводника до того, как его расплавили?

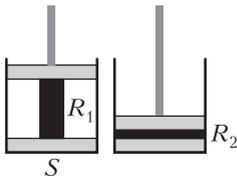


Рис. 4

3. Два груза массами m и M ($m < M$) соединены легкой нерастяжимой нитью, которая перекинута через невесомый блок (рис.5). Ось блока перемещают вверх с постоянным ускорением. При каком минимальном значении ускорения a ускорения обоих грузов не будут направлены вниз? Ускорение свободного падения g .

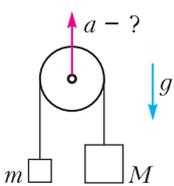


Рис. 5

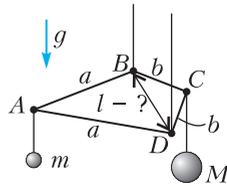


Рис. 6

4. Весы представляют собой плоскую четырехугольную рамку $ABCD$, подвешенную на длинных нитях, прикрепленных к вершинам B и D (рис.6). Рамка состоит из невесомых стержней, шарнирно закрепленных в вершинах. Длины сторон AB и AD равны a . Длины сторон BC и CD равны b . К вершинам A и C прикреплены грузы массами m и

M . Определите расстояние BD , если известно, что весы находятся в равновесии в горизонтальной плоскости.

10 класс

1. Из однородной проволоки сделали фигуру, состоящую из трех отрезков (рис.7.) Длины вертикальных отрезков равны, а горизонтальный отрезок в полтора раза длиннее каждого из вертикальных. Во сколько раз уменьшится сопротивление между точками A и B , если эти точки соединить прямым участком такой же проволоки?

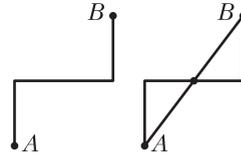


Рис. 7

2. Горизонтальный диск радиусом R насажен на вертикальную ось и вращается с угловой скоростью ω на высоте h над столом (рис.8). Две маленькие шайбы, связанные невесомой нитью длиной $2R$, вращаются

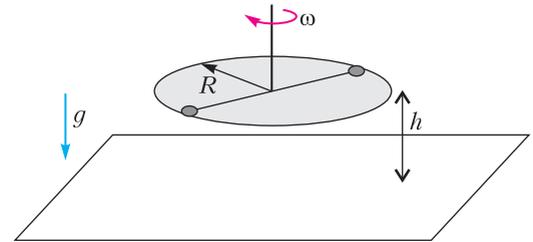


Рис. 8

вместе с диском, находясь на его краях. Нить перерезают. Шайбы срываются с диска и падают вниз на стол. Найдите расстояние между точками первых ударов шайб о стол. Трения нет. Ускорение свободного падения g .

3. См. задачу 4 для 9 класса.

4. По горизонтальной плоскости катится без проскальзывания колесо радиусом R (рис.9). От задней части колеса на высоте, равной R , отрывается кусочек грязи. При какой минимальной скорости v движения колеса этот кусочек грязи

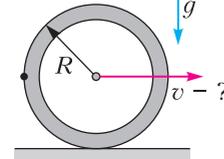


Рис. 9

опять попадет в ту же точку колеса? Ускорение свободного падения g .

11 класс

1. Мальчик стоял очень близко к карусели, двигающейся по кругу радиусом R , и,

когда его брат, сидящий на карусели, поравнялся с ним, бросил снежок строго по диаметру на противоположный конец карусели с минимально необходимой для этого скоростью (рис.10).

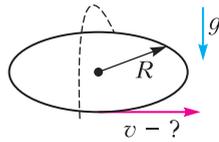


Рис. 10

Когда его брат совершил пол оборота и оказался на другом конце карусели, снежок попал в него. Найдите скорость движения мальчика, сидящего на карусели. Ускорение свободного падения g . Размерами мальчиков и высотой карусели пренебречь.

2. Заряд q влетает в конденсатор под углом α к пластине (рис.11) и начинает замедляться под действием электрического поля. Кинетическая энергия заряда на влете в конденсатор T . Напряжение на конденсаторе U . Под каким углом заряд вылетит из конденсатора?

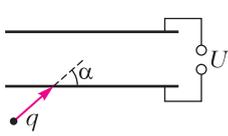


Рис. 11

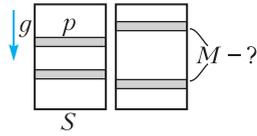


Рис. 12

3. Закрытый вертикальный цилиндрический сосуд с идеальным газом разделен на три части двумя одинаковыми массивными поршнями (рис.12). Давление в верхней части сосуда p . Поршни зарядили некоторыми зарядами, после чего объем над верхним поршнем уменьшился в 3 раза, а объем под нижним поршнем уменьшился в 2 раза. Найдите массу поршней. Ускорение свободного падения g , площадь сечения сосуда S . Температура постоянная.

4. При какой минимальной средней плотности материала шарообразного астероида, состоящего из мелких каменных обломков, период обращения вокруг своей оси этого астероида может быть равен T ? Гравитационная постоянная G . Астероид можно считать однородным.

II (заключительный) этап

8 класс

1. Толя и Поля бегают на стадионе по кругу. Стартовав из одной точки и двигаясь равномерно в противоположных направлениях, школьники периодически встречаются друг друга в разных точках стадиона. Найдите скорость Поля, если скорость Толи

равна 12 км/ч, он бежит быстрее Поля, а их 3-я встреча произошла в точке старта.

2. В теплоизолированный сосуд, содержащий 1 кг воды при температуре замерзания 0°C , наливают 3 кг жидкого азота, находящегося при температуре кипения -196°C . Найдите установившуюся температуру T_1 в сосуде. Удельная теплота плавления льда 336 кДж/кг , удельная теплоемкость льда $2,1 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{град)}$, удельная теплота испарения азота 200 кДж/кг . Сосуд не препятствует выходу испаряющихся газов. Какой станет температура T_2 в сосуде, если в него долить еще 1 кг жидкого азота?

3. В цилиндрическом сосуде с узким горлышком – бутылке – находится легкая шайба. В сосуд равномерно наливают воду, добавляя одинаковый объем воды в единицу времени. Вода может подтекать под шайбу. График зависимости высоты уровня воды в бутылке от времени показан на рисунке 13.

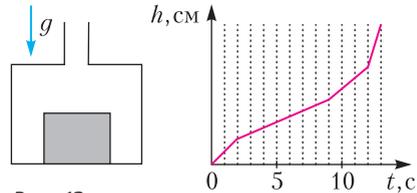


Рис. 13

Определите плотность шайбы, если плотность воды ρ_0 .

4. В цилиндрическом сосуде с жидкостью плотностью ρ_1 плавает тело (рис.14). Затем в сосуд доливают вторую жидкость плотностью $\rho_2 < \rho_1$ до тех пор, пока тело полностью не вытеснится из первой жидкости. После этого общий уровень жидкости в стакане увеличился на ΔH , а уровень первой жидкости уменьшился на Δh . Найдите толщину слоя верхней жидкости после того, как тело извлекли из сосуда.

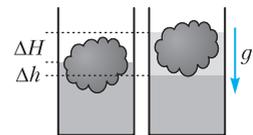


Рис. 14

9 класс

1. Толя и Поля бегают на стадионе по кругу. Стартовав из одной точки и двигаясь равномерно в противоположных направлениях, школьники периодически встречаются друг друга в разных точках стадиона. Найдите скорость Поля, если известно, что ско-

рость Толи равна 12 км/ч, он бежит быстрее Поли, скорости ребят отличаются менее чем в 2 раза, а их 7-я встреча произошла в точке старта.

2. Два однородных стержня, сделанных из разных материалов, имеют длины L_1 и L_2 при температурах T_1 и T_2 соответственно. Коэффициент линейного теплового расширения (коэффициент пропорциональности между относительным изменением длины и вызвавшим его изменением температуры) первого стержня α_1 , а второго α_2 . При какой температуре T (одинаковой для обоих стержней) сумма длин стержней не изменится по сравнению с исходной? Считайте, что изменения длин малы по сравнению с L_1 и L_2 .

3. См. задачу 4 для 8 класса.

4. Три поросенка строили дом. Для отделки чердака им понадобился однородный деревянный лист в виде треугольника с углами 45° , 90° и 45° . Поросята взяли лист за вершины и понесли его в горизонтальном положении к строящемуся дому. Оказалось, что вес, который пришелся на Нуф-Нуфа, взявшего за вершину треугольника с углом 90° , равен $P = 50$ Н. Определите массу треугольника. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

5. К горизонтальному столу в точке O прикреплена вертикальная гладкая спица (рис.15). На спицу нанизана маленькая бусинка массой m , которая удерживается на высоте L над столом. Грузик массой M прикреплен к бусинке при помощи нерастяжимой нити, пропущенной через отверстие в столе на расстоянии $L/2$ от точки O . Бусинку отпускают, и она начинает падать вниз.

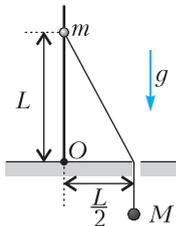


Рис. 15

Найдите скорость бусинки в момент, когда она коснется поверхности стола. Ускорение свободного падения g . Трения нет.

10 класс

1. Жесткий стержень движется, оставаясь все время в плоскости xy . В некоторый момент времени один из его концов находится в начале координат, а координаты второго равны $x_2 = 40$ см, $y_2 = 30$ см. При этом проекции скоростей первого и второго концов стержня на оси x и y равны $v_{1x} = 0$,

$v_{1y} = 15$ м/с, $v_{2x} = 15$ м/с соответственно. Найдите v_{2y} .

2. Однородный стержень имеет длину L при температуре T . Какую длину будет иметь стержень, если один его конец поддерживать при температуре T_1 , а другой – при температуре T_2 ? Коэффициент линейного теплового расширения α (коэффициент пропорциональности между относительным изменением длины и вызвавшим его изменением температуры). Считайте, что изменение длины мало по сравнению с L .

3. Вертикальный цилиндрический сосуд площадью S разделен на две части легким поршнем, который может перемещаться без трения. Идеальный газ под поршнем занимает объем V_1 , а над поршнем находится жидкость плотностью ρ , занимающая объем

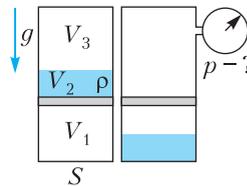


Рис. 16

V_2 , а также идеальный газ объемом V_3 (рис.16). Поршень находится в равновесии. Затем сосуд перевернули. В новом положении равновесия поршень оказался на той же высоте. Определите показание манометра, подключенного к верхнему объему сосуда в новом положении. Температура постоянна. Ускорение свободного падения g . Давлением насыщенных паров пренебречь.

4. Однородную тонкую рейку длиной l и массой M положили поперек закрепленного горизонтального цилиндра радиусом R так, что она находится в равновесии в горизонтальном положении

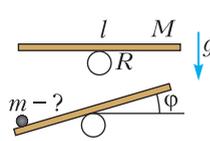


Рис. 17

тальном положении (рис.17). Затем к левому краю рейки прикрепили маленький грузик и аккуратно отпустили так, что рейка пришла в новое равновесное положение – под углом ϕ к горизонтали (угол измеряется в радианах). Найдите массу m грузика. В процессе перехода в новое положение рейка не проскальзывала относительно цилиндра.

5. Правый край тонкого невесомого стержня закреплен шарнирно на вертикальной стене, левый опирается на вертикальный тонкий цилиндр, опирающийся на пружину жесткостью k (рис.18). Цилиндр может пе-

ремещаться вертикально без трения. Стержень занимает горизонтальное положение в равновесии. Расстояние от стены до цилиндра L . Затем на стержень надели бусинку массой m , которая может перемещаться вдоль него. Коэффициент трения между бусинкой и стержнем μ . Трения между стержнем и цилиндром нет. Найдите максимальное расстояние x между бусинкой и стеной, при котором бусинка останется в покое, если $x < L$. Ускорение свободного падения g .

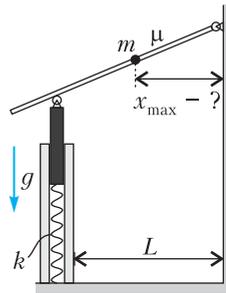


Рис. 18

11 класс

1. Жесткий стержень движется, оставаясь все время в плоскости xu . В некоторый момент времени угол между стержнем и осью x равен 60° (рис.19). При этом проекции скоростей первого и второго концов стержня на оси x и y равны v_{1x} , v_{1y} , v_{2x} соответственно. Найдите v_{2y} .

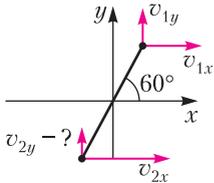


Рис. 19

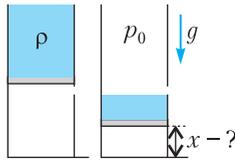


Рис. 20

2. В вертикальном цилиндрическом сосуде расположен тонкий невесомый поршень. Сосуд над поршнем открыт, под поршнем находится воздух при атмосферном давлении. Поршень удерживают и наливают сверху большое количество жидкости плотностью ρ (рис.20). В стенке сосуда прямо под поршнем образовалась маленькая дырочка, через которую может медленно вытекать жидкость. Поршень отпускают. Определите, на какой высоте над дном установится поршень, если к этому моменту вытекла не вся жидкость. Атмосферное давление p_0 , ускорение свободного падения g . Температуру считайте постоянной, трением можно пренебречь.

3. Два мотоциклиста покоятся на расстоянии l друг от друга. Они одновременно стартуют и в дальнейшем движутся равноускоренно. Ускорение a_1 первого мотоцик-

листа вдоль прямой, соединяющей мотоциклистов. Ускорение a_2 второго мотоциклиста направлено перпендикулярно этой прямой. Через какое время t после старта расстояние между ними будет минимальным?

4. Пластины плоского конденсатора, на который подано некоторое напряжение, удерживаются на расстоянии d друг от друга несколькими одинаковыми непроводящими пружинами, сжатыми на величину x (длина несжатых пружин равна $d + x$). После медленного увеличения напряжения равновесное расстояние между пластинами уменьшилось на Δd . Во сколько раз было увеличено напряжение? Силы тяжести нет.

5. **Задача-оценка.** Весенняя капля: с крыши пятиэтажного дома падают капли воды. Оцените характерную величину давления, оказываемого каплей при ударе об асфальт. Предполагается, что Вы хорошо представляете явление, можете сами задать недостающие в условии задачи величины, выбрать их численные значения и получить численный результат.

6. **Задача-демонстрация** (демонстрируется видеоролик). Между лампой накаливания и белым экраном расположена решетка с вертикальными щелями (рис.21). На экра-

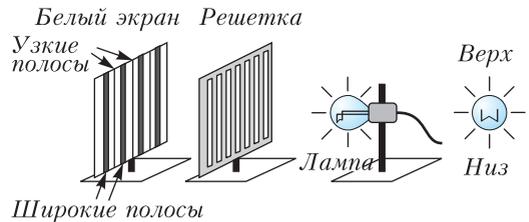


Рис. 21

не между широкими темными полосами видны темные узкие полоски. При приближении решетки к экрану в определенный момент широкие полосы остаются темными, а узкие полоски превращаются в светлые. Объясните наблюдаемое явление.

Публикацию подготовили В.Боровков, Е.Жданов, А.Киприянов, С.Лежнин, М.Махмудиан, А.Ненашев, Е.Пальчиков, А.Погосов, Д.Похабов, Г.Федотович

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ России

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций

Математика

1. а) (9, 10 кл.) У Олега есть 550 рублей, и он хочет подарить маме на 8 Марта тюльпаны, причем непременно их должно быть нечетное число и ни один оттенок цвета не должен повторяться. В магазине, куда пришел Олег, один тюльпан стоит 49 рублей и есть в наличии цветы одиннадцати оттенков. Сколько существует способов у Олега подарить маме цветы? (Ответ в задаче должен быть компактным выражением, не содержащим знаков суммирования, многоточий и т.п.)

б) (11 кл.) Та же задача, но исходно у Олега 1000 рублей, а цветы двадцати оттенков.

2. (9, 10 кл.) Отличные от нуля числа a и b являются корнями квадратного уравнения $x^2 - 5px + 2p^3 = 0$. Уравнение $x^2 - ax + b = 0$ имеет единственный корень. Найдите p . Решение обоснуйте.

3. (9,10 кл.) Придумайте какую-нибудь систему из двух уравнений с двумя неизвестными x и y , чтобы ее решениями были *только* следующие три пары чисел: $x = y = 1$, $x = y = 2$ и $x = 3$, $y = 4$. В записи уравнений системы, помимо чисел и собственно неизвестных x и y , разрешается использовать скобки, знак $=$, стандартные арифметические операции и элементарные функции.

4. (9, 10, 11 кл.) Функция $y = f(x)$ определена на множестве $(0; +\infty)$ и принимает на нем положительные значения. Известно, что для любых точек A и B на графике функции площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой

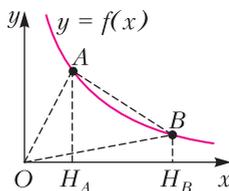


Рис. 1

(рис.1; H_A , H_B – основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на ось абсцисс, O – начало координат). Найдите все такие функции. Решение обоснуйте.

5. (9, 10, 11 кл.) На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки E и F таким образом, что угол EAF равен 45° . Длина стороны квадрата равна 1. Найдите периметр треугольника CEF . Решение обоснуйте.

6. (9, 10, 11 кл.) Пусть x_1 и x_2 – наибольшие корни многочленов $f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4$ и $g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$ соответственно. Найдите $\frac{x_1}{x_2}$. Решение обоснуйте.

7. (9, 10, 11 кл.) Вычислите с точностью до одной десятой значение выражения

$$\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + \dots}}}$$

8. (9, 11 кл.) Пусть A и B – некоторые числовые множества, а множество $C = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ представляет собой их сумму. (Другими словами, множество C состоит из всевозможных сумм элементов множеств A и B . Если, например, $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$, то $C = \{1, 2, 3, 4\}$.)

Известно, что $C = \{0, 1, 2, \dots, 2^{2828}\}$, а максимальный элемент множества A равен

$$\max A = (\sqrt{2} - 1)^{2020} + (\sqrt{2} + 1)^{2020}.$$

Докажите или опровергните следующие утверждения: 1) множество A и множество B содержат конечное число членов; 2) все элементы множеств A и B – целые числа; 3) $\max B \geq 2$.

9. (10,11 кл.) Известно, что число $\cos 6^\circ$ является корнем уравнения $32t^5 - 40t^3 + 10t - \sqrt{3} = 0$. Найдите остальные четыре корня этого уравнения. (Ответы в задаче должны быть компактными выражениями, не содержащими знаков суммирования, многоточий и т.п.)

Физика

9 класс

1. Автомобиль массой $m = 2,5$ т движется с постоянной скоростью $v = 54$ км/ч по во-

нугому мосту с радиусом кривизны $R = 90$ м. С какой силой F автомобиль давит на мост, проезжая его середину? Считать $g = 9,8$ м/с². (15 баллов)

2. Плавающая в жидкости с неизвестной плотностью, кубическое тело погружается на глубину h_1 . Плавающая в жидкости с другой неизвестной плотностью, это же тело погружается на глубину h_2 . Какова будет глубина H погружения этого тела в жидкости с плотностью, равной средней арифметической плотностей первых двух жидкостей ($\rho = (\rho_1 + \rho_2)/2$)? Грани погруженного тела в форме куба либо параллельны, либо перпендикулярны поверхностям жидкостей. (15 б.)

3. Симметричную гранату бросили со скоростью v_0 под углом α к горизонту. В верхней точке траектории граната разорвалась на множество одинаковых осколков. Какую скорость u имеет сразу после взрыва тот осколок, который первым упадет на землю? Максимальная скорость осколков после взрыва v_1 . (20 б.)

4. Однородный щит, имеющий форму прямоугольника, стоит на горизонтальном полу прислоненным к стене. Коэффициенты трения скольжения щита о пол $k_{\text{п}}$ и стену $k_{\text{с}}$ известны. При каком минимальном угле наклона α щита к полу щит не будет скользить по полу? (20 б.)

5. В горизонтально расположенном цилиндрическом сосуде длиной L находятся n подвижных физических бесконечно тонких теплонепроницаемых поршней, делящих сосуд на $n + 1$ отсек. Первоначально объемы всех отсеков одинаковы, температура газов во всех отсеках равна T_0 . Затем газ в самом левом отсеке нагревают до температуры T ($T > T_0$). При этом в других отсеках поддерживают прежнюю температуру T_0 . На какое расстояние ΔL сместится самый правый поршень? (30 б.)

10 класс

1. В 1827 году ботаник Р. Броун, исследуя пыльцу цветов под микроскопом, обнаружил, что плавающие в воде зернышки пыльцы двигаются непрерывно и хаотически. Он заметил, что в горячей воде зернышки перемещаются быстрее, чем в холодной. Во сколько раз скорость зернышек при температуре 50 °С больше, чем при 20 °С? (20 баллов)

2. Электродвигатель подключен к источнику постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В. При полном затормаживании якоря электродвигателя в цепи течет ток $I_0 = 3$ А. Какую мощность P развивает электродвигатель (с незаторможенным якорем), когда по его обмотке течет ток $I = 2$ А? (20 б.)

3. Сосуд вместимостью $V = 30$ л разделен на три равные части неподвижными полупроницаемыми тонкими перегородками. В левую часть вводят 30 г водорода, в среднюю 160 г кислорода и в правую 84 г азота. Через левую перегородку может диффундировать только водород, через правую – водород и азот. Какое давление будет в каждой из трех частей сосуда после установления равновесия, если оно поддерживается при постоянной температуре $T = 300$ К? (20 б.)

4. Заряженная частица массой 1 мг находится в вакууме в электрическом поле неподвижного равномерно заряженного шара. Частицу удерживают в состоянии покоя на некотором расстоянии от центра шара, действуя на нее силой 1 мН. Затем частицу отпускают, и она начинает двигаться. Пройдя от исходного положения расстояние 1 м, частица приобретает скорость 1 м/с. Каково ускорение частицы в этот момент времени? Частица и шар заряжены одноименно. (20 б.)

5. Известно, что капля жидкости в невесомости принимает сферическую форму, обусловленную собственным поверхностным натяжением, величина которого определяется коэффициентом поверхностного натяжения σ . В этом случае на единицу поверхности капли радиусом R действует сила лапласовского давления $p_{\text{л}} = 2\sigma/R$, направленная внутрь поверхности и перпендикулярная ей. Пусть теперь на каплю поместили заряд q , равномерно распределенный по ее поверхности. Найдите величину q , при которой капля может потерять сферическую форму. Величины σ и R известны. Используя полученное выражение для q , рассчитайте q при $\sigma = 0,073$ Н/м и $R = 1$ см. (20 б.)

11 класс

1. См. задачу 4 для 10 класса. (20 баллов)
2. См. задачу 5 для 9 класса. (20 б.)
3. Центральная часть Земли – ядро – состоит из железа. Внутренняя часть ядра радиусом R твердая, а внешняя часть расплавлена. Ядро медленно остывает. Оцени-

те, на сколько ΔR метров изменится радиус твердой части при остывании ядра на $|\Delta T|$ кельвинов. Удельная теплота плавления железа q , начальная температура ядра T , при затвердевании плотность железа увеличивается на величину $\Delta \rho$, малую по сравнению с самой плотностью. С увеличением давления температура плавления железа возрастает согласно уравнению $dp/dT = q/(T\Delta V)$, где ΔV – приращение удельного объема при плавлении, dp и dT – приращения давления и температуры соответственно. (20 б.)

4. На жестко закрепленной цилиндрической серебряной струне массой m , длиной l и площадью поперечного сечения S при температуре $T = 0^\circ\text{C}$ возбуждают стоячую волну с максимальной длиной волны. Сила натяжения струны N , ее жесткость k , коэффициент линейного расширения α , удельное сопротивление ρ , удельная теплоемкость c .

Скорость волны принять равной $v = \sqrt{\frac{N}{\lambda}}$,

где λ – линейная плотность струны. Через струну пропускают постоянный электрический ток I . Объемным расширением, теплоотдачей и зависимостью сопротивления от температуры пренебречь. Найдите частоту колебаний f через время t . (20 б.)

5. См. задачу 5 для 10 класса. (20 б.)

Математика и криптография

1. (8–11 классы) Найдите наибольшее пятизначное число, которое в 51 раз больше квадрата суммы своих цифр. Решение обоснуйте.

2. (8–11 кл.) На координатной прямой отмечены 9 точек с координатами 2; 25; 7; –3; 12; 19; –5; 8; 9. Найдите координату точки, сумма расстояний от которой до указанных 9 точек минимальна. Ответ обоснуйте.

3. (8–11 кл.) Ключом шифрсистемы служит таблица 4×4 , в каждую ячейку которой

1	1	2	2
2	1	1	2
0	0	1	2
0	1	2	0

Рис. 2

записана одна из цифр 0, 1, 2 (рис.2). При этом должны делиться на 3 сумма цифр в каждой строке, сумма цифр в каждом столбце, а также суммы цифр на каждой из двух диагоналей, отмеченных пунктиром. На рисунке приведен один из возможных вариантов ключа. Сколько существует всего различных ключей?

4. (8–10 кл.) На границе Кристоландии установлена пропускная система, имеющая 20 входов и 20 выходов (входы перед границей, выходы – уже в Кристоландии). Входы и выходы занумерованы независимо друг от друга числами от 1 до 20, причем в неизвестном для Кристоландии порядке. От каждого входа проложен один «прямой» туннель к одному из выходов, причем от разных входов – к разным выходам. От каждого выхода проложен один «обратный» туннель ко входу с тем же номером, что у этого выхода. Посетитель сам выбирает один из входов. Войдя в него, он попадает в лифт, в котором есть 2 кнопки: зеленая – «ехать», красная – «выходить». Система работает следующим образом. Посетитель, находясь в лифте около входа, нажимает зеленую кнопку, лифт по прямому туннелю доставляет его к соответствующему выходу. Находясь в лифте около выхода, посетитель может: 1) нажать зеленую кнопку, и тогда лифт по обратному туннелю доставит его ко входу с тем же номером; 2) нажать красную кнопку, и тогда выход откроется, но только если его номер совпадает с номером того входа, через который посетитель вошел первоначально. В противном случае (при несовпадении номеров) посетитель будет удален за пределы Кристоландии и сможет воспользоваться правом посещения только через год.

Алиса решила провести каникулы в Кристоландии. При этом ей стала известна схема прямых туннелей системы пропуска (рис.3). Здесь верхнее число является номером входа, а стоящее под ним число – номером того выхода, к которому ведет прямой туннель. За какое минимальное число поездок по

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20	11	10	12	18	1	4	7	17	8
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5	19	6	3	13	9	16	2	14	15

Рис. 3

туннелям Алиса сможет гарантированно попасть в Криптоландию? Ответ обоснуйте.

5. (8–11 кл.) Для зашифрования осмысленного слова его буквы заменили числами x_1, x_2, \dots, x_n по таблице (рис.4). Затем выбра-

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я	
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	

Рис. 4

ли четные натуральные числа p и q и для каждого числа x_i из соотношений $x_i = y_i + pz_i$, $z_i = y_i + qx_i$ нашли целые числа y_i и z_i . Потом по формулам $z'_i = r_{32}(z_i)$, $i = 1, \dots, n$, получили числа z'_1, \dots, z'_n (где $r_{32}(a)$ – остаток от деления числа a на 32), которые вновь заменили буквами согласно таблице. В результате получили вот что: **ЖЯЮЦКР**. Найдите исходное слово, если известно, что оно начинается на букву **В**.

6. (8–11 кл.) Устройство принимает на вход и выдает на выход наборы из n битов (причем $n \geq 4$). Поданный на вход набор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ преобразуется в выходной набор $h(\mathbf{x}) = (x_1 \oplus x_{n-1}, x_2 \oplus x_n, x_2 \oplus x_3, x_3 \oplus x_4, \dots, x_{n-2} \oplus x_{n-1}, x_1 \oplus x_n)$, где \oplus – стандартная операция сложения битов: $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$, $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$. Подав теперь этот набор $h(\mathbf{x})$ на вход, получим на выходе набор $h(h(\mathbf{x})) = h^{(2)}(\mathbf{x})$, который вновь подадим на вход и получим $h^{(3)}(\mathbf{x})$, и т.д. Докажите, что если все наборы $\mathbf{x}, h(\mathbf{x}), h^{(2)}(\mathbf{x}), \dots, h^{(k)}(\mathbf{x})$ оказались различными, то $k \leq 2^{n-1} - 1$.

7. (11 кл.) Целое число $s \in \{0, \dots, 30\}$ может быть преобразовано следующим образом. Пусть, например, $s = 9$. Представим его в двоичной системе счисления пятизначным числом: $s = 9 = 01001_2$. Теперь выберем ка-

кое-нибудь целое число $c \geq 0$ и сдвинем получившуюся строку 01001 циклически на c позиций влево. Например, при $c = 1$ получится строка 10010, представляющая собой двоичную запись числа 18. Значит, сдвигом на одну позицию из числа 9 получается число 18; будем это записывать так: $9 \lll 1 = 18$. (Если 01001 сдвинуть влево на две позиции, то получится 00101, т.е. $9 \lll 2 = 5$.) Итак, $s \lll c$ – это число, получившееся сдвигом числа s на c позиций влево.

Для зашифрования осмысленного слова выбирается секретный ключ – набор из 64 чисел $k_1, \dots, k_{32} \in \{0, \dots, 30\}$ и $c_1, \dots, c_{32} \in \{0, 1, 2, 3\}$. Затем с каждой буквой слова (по отдельности) проделывается следующее. Букву заменяют числом a по таблице (рис.5) и

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		
Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я	
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	

Рис. 5

последовательно вычисляют $a_1 = (a + k_1) \lll \lll c_1$, $a_2 = (a_1 + k_2) \lll c_2$, ..., $a_{32} = (a_{31} + k_{32}) \lll c_{32}$. Исходную букву затем заменяют на букву, соответствующую числу a_{32} . (Если в процессе вычислений получается число, превышающее 30, то оно заменяется остатком от деления на 31. Так, сумму $20 + 17$ следует заменить на 6.)

В результате зашифрования получился набор букв **ЯГКЫНИ**. Найдите исходное слово, если известно, что при зашифровании на этом ключе буква **Ъ** переходит в букву **Ь**, а буква **П** – в **Е**.

Публикацию по математике, а также по математике и криптографии подготовили С.Рамоданов, О.Шабанин, по физике – В.Попов

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. «Квант» №10)

1. 27 красных и 36 синих.

Синих зонтиков вдвое меньше, чем желтых и красных. Это означает, что синие зонтики составляют треть от всех. Аналогично, красные зонтики составляют четверть от всех. Нарисуем отрезок,



Рис. 1

изображающий все зонтики (рис.1). Что бы на нем удобно изображались и треть, и четверть от всего отрезка, сделаем его длиной 12 клеток. Синим зонтикам соответствует отрезок в 4 клетки, красным – в 3 клетки, а на долю желтых останется $12 - 3 - 4 = 5$ клеток. Если 45 зонтиков изображаются как 5 клеток, то каждая клетка – это 9 зонтиков. Тогда синих зонтиков $4 \cdot 9 = 36$, а красных $3 \cdot 9 = 27$.

2. 6:4.

По окончании восьмого раунда возможны два варианта счета (учитывая, что игра идет до 6 очков и еще не завершилась): 4:4 или 5:3. Из первого узнать исход следующего раунда нельзя, поэтому остается только вариант 5:3. Тогда имеем три возможных финальных счета: 6:3, 6:4 или 6:5.

Перед счетом 5:3 мог быть либо счет 5:2, либо 4:3. Если бы игра завершилась со счетом 6:3, то в каждом из этих двух случаев можно было бы однозначно определить исходы оставшихся раундов, поэтому Олег знал бы их не позже чем после седьмого раунда.

Если бы игра завершилась со счетом 6:5, то перед последним раундом был бы счет 6:5, не позволяющий определить, какая из команд победит.

А вот знание финального счета 6:4 позволяет при счете 5:3 однозначно определить исходы последних двух раундов. При этом если после седьмого раунда был счет 4:3, то ситуация была неопределенной: дальше могло быть как 4:4, так и 5:3.

3. Выберем из каждого пакета самую легкую сливу и сложим их все в 21-й пакет. Так как масса каждой выбранной сливы не превышает $\frac{1}{26}$ кг, то их общая масса не больше $\frac{20}{26} < 1$ кг. При этом масса каждого исходного пакета стала меньше 1 кг, и в них осталось по 25 слив. Повторим операцию: переложим самую легкую сливу из каждого исходного пакета в 22-й пакет, общая масса слив там будет меньше $\frac{20}{25}$ кг. Продолжая такую операцию, доведем число пакетов до 26.

4. 23,14.

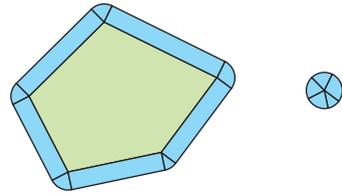


Рис. 2

Разобьем добавленную Таней площадь на пять прямоугольников ширины 1, у каждого из которых одна из сторон совпадает со стороной исходного пятиугольника, и на сектора кругов радиуса 1 с вершинами в вершинах пятиугольника (рис.2). Добавленная площадь равна сумме площадей прямоугольников и площадей секторов. Сумма площадей прямоугольников равна произведению ширины (равной 1) на сумму длин сторон пятиугольника: $1 \cdot 20$. Сектора же складываются в один полный круг, площадь которого равна $\pi \cdot 1^2$. Следовательно, добавленная площадь составляет $20 + \pi \approx 23,14$.

Комментарий. Объяснить, почему сектора действительно складываются в полный круг, можно следующим образом. У двух соседних секторов два ограничивающих радиуса являются противоположными сторонами прямоугольника. Значит, если «схлопнуть» прямоугольник, сторонами которого они являются, то два соседних сектора объединятся в один сектор. Сделав так с каждой парой, мы получим целый круг.

Приведенное рассуждение справедливо для любого выпуклого многоугольника. Угол сектора равен соответствующему внешнему углу многоугольника, так что по сути мы доказали, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360° (см. по этому поводу также <https://etudes.ru/models/exterior-angles-sum/>).

Аналогичная формула для площади «окрестности» верна для произвольных ограниченных выпуклых фигур. Об этой теореме Штейнера можно прочитать в статье Л.Локуциевского и В.Тихомирова «Выпуклый анализ на плоскости» («Квант», 2018, № 5).

Задачи

(см. «Квант» №11-12)

1. 380.

Заметим, что черепашка тогда и только тогда помещается в прямоугольнике целиком, когда центр ее панциря находится в узле сетки, который лежит на границе четырех плиток. Таких узлов в прямоугольнике 20×21 будет $19 \times 20 = 380$.

2. Перепишем равенство в виде ПЯТЬ \times 6 = ШЕСТЬ \times 5. Раз правая часть делится на 5, то

и левая тоже, а значит, Б делится на 5. Аналогично, раз левая часть четна, то и правая тоже, таким образом, Б четно. Следовательно, $B = 0$. Сократив ПЯТЬ и ШЕСТЬ на 10, получим ПЯТ и ШЕСТ. Для них то же рассуждение позволяет сделать вывод, что $T = 0$. Получаем противоречие: две разные буквы не могут обозначать одну и ту же цифру.

3. 3 аборигена.

Оценка. Рассмотрим двух самых старых аборигенов. Они являются лжецами, поскольку не могут оказаться младше обоих своих соседей. Следовательно, во второй день самый старый абориген не мог сказать, что оба его соседа младше него, поэтому его съели. Тогда по аналогичным соображениям съели и второго по старшинству.

Теперь рассмотрим самого молодого аборигена. Он действительно был младше обоих своих соседей, поэтому является рыцарем. Если бы его не съели, то второй раз про своих соседей он снова сказал бы, что они старше него. Значит, и его тоже съели. Таким образом, всего было съедено не менее трех аборигенов.

Пример. Пронумеруем аборигенов числами от 1 до 100 в порядке увеличения возрастов. Расставим их в таком же порядке по кругу, поменяв местами аборигенов 98 и 99. Если аборигены 1 и 98 – рыцари, а все остальные – лжецы, то каждый может сказать, что оба его соседа старше него. Как понятно из оценки, должны быть съедены аборигены 1, 99 и 100. После этого оставшиеся встают в том же порядке, как и раньше, тогда каждый может сказать, что оба его соседа младше него.

4. Поровну.

Заметим, что в таблице 24 крайние клетки и столько же не крайних. Кроме того, среди чисел от 1 до 48 ровно 15 простых: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Раскрасим крайние клетки произвольным образом в 24 цвета (каждую клетку – в свой цвет) и так же поступим с внутренними клетками, используя тот же набор цветов. Рассмотрим какой-нибудь способ нумерации клеток с семью простыми числами на краю. Поменяв местами все числа в парах одноцветных клеток. Все семь простых чисел с края уйдут внутрь, а на край из внутренних клеток попадут оставшиеся восемь простых чисел. Таким образом, выбранному способу расстановки с семью простыми числами на краю соответствует способ расстановки с восемью простыми числами на краю. Таким же образом из способа с восемью простыми числами на краю получается способ с семью простыми на краю. В итоге между указанными способами расстановки чисел установлено взаимно однозначное соответствие, поэтому их одинаковое количество.

Конкурс имени А.П.Савина

(с.м. «Квант» №9)

1. Можно (рис.3).
2. а) Да, например, прямоугольник 3×4 (рис.4).
- б) Да. Пример приведен на рисунке 5.

7777	7788	8877
7878	8777	7787
8787	7877	7778

Рис. 3

Проверить, что треугольники разные, можно по площади.

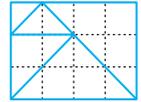


Рис. 4

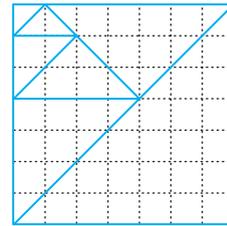


Рис. 5

3. Пусть ящик имеет длину D , ширину $Ш$ и высоту B . Первым измерением натянем веревку между противоположными вершинами и найдем длину главной диагонали. По теореме Пифагора ее квадрат равен $D^2 + Ш^2 + B^2$. Вторым измерением проложим веревку вдоль трех последовательных ребер в различных направлениях и узнаем сумму $D + Ш + B$. Теперь мы можем вычислить $(D + Ш + B)^2 - (D^2 + Ш^2 + B^2) = 2DШ + 2ВШ + 2ВD$,

что равно сумме площадей граней ящика.

4. Рассмотрим данный треугольник ABC и произвольные точки A_1, B_1, C_1 , образующие правильный треугольник или совпадающие (отрезки AA_1, BB_1, CC_1 не обязательно равны). Предположим, что вершины A_1, B_1, C_1 идут по часовой стрелке при обходе границы треугольника $A_1B_1C_1$ (рис.6). Далее, вместо того чтобы писать «вершины треугольника XYZ перечислены при обходе границы по часовой стрелке», будем писать сокращенно « XYZ (по ч.с.)».

Отметим точки C_2 и C_3 такие, что треугольники A_1BC_2 (по ч.с.) и ABC_3 (по ч.с.) правильные. Тогда (из свойств поворота; также можно получить это и просто из равенства треугольников) $AA_1 = C_3C_2$ и $BB_1 = C_2C_1$. Значит,

$$CC_1 + BB_1 + AA_1 = CC_1 + C_1C_2 + C_2C_3 \geq CC_3$$

по неравенству ломаной. Построение точки C_3 не зависело от выбора точек A, B, C . Таким образом, оценка завершена.

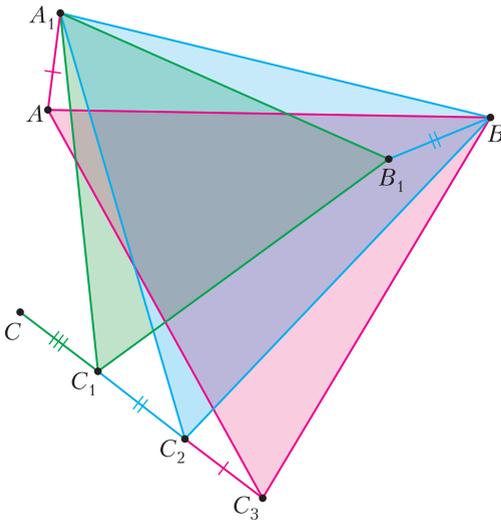


Рис. 6

Построение примера понятно из оценки. Построим правильный треугольник ABC_3 (по ч.с.). Чтобы отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 были равны и имели наименьшую возможную длину, нужно, чтобы отрезки CC_1 , C_1C_2 , C_2C_3 были равны и имели наименьшую возможную длину. Значит, следует разбить отрезок CC_3 на три равные части точками C_1 и C_2 , после чего построить правильный треугольник A_1BC_2 (по ч.с.) и затем правильный треугольник $A_1B_1C_1$ (по ч.с.).

Аналогично, если вершины A_1 , B_1 , C_1 идут против часовой стрелки при обходе границы треугольника $A_1B_1C_1$: тогда наименьшее значение выражения $AA_1 + BB_1 + CC_1$ равно CC_3' , где точка C_3' такая, что ABC_3' правильный и его вершины названы при обходе против часовой стрелки.

Осталось выбрать из отрезков CC_3 и CC_3' кратчайший. Так как точки C_3 и C_3' симметричны относительно AB , то ближе к точке C из них будет та, что лежит с ней в одной полуплоскости относительно прямой AB .

Механизм излучения ускоренно движущегося заряда

1. Поскольку кинетическая энергия, которую приобретет протон при таком перемещении в электрическом поле (1 МэВ), значительно меньше собственной энергии протона ($mc^2 = 938,27$ МэВ), то его движение описывается в рамках классической механики и для вычисления энергии излучения можно воспользоваться формулой Лармора. Обозначим заряд протона через q , а его массу через m . Ускорение $a = qU/(mL)$, где $U = \phi - \phi_0$. Время движения t таково, что $L = at^2/2$, т.е. $t = (2L/a)^{1/2}$. Подстав-

ля полученные соотношения в формулу Лармора, получаем энергию возникшего излучения:

$$E = Wt = \frac{2kq^2 a^2}{3c^3} \left(\frac{2L}{a} \right)^{1/2} = \frac{kq^2 \left(\frac{2qU}{mc^2} \right)^{3/2}}{3L} = \frac{kq^2 \left(\frac{2qU}{mc^2} \right)^{3/2}}{3L}.$$

Численное значение искомой величины в этой и последующих задачах читатели смогут получить самостоятельно.

2. Кинетическая энергия электрона, которую он приобретет, совершив такое «путешествие», составит примерно 20 эВ. Эта величина значительно меньше собственной энергии электрона 0,51 МэВ, а значит, движение частицы можно описывать в рамках классической механики. Для вычисления энергии излучения опять же можно воспользоваться формулой Лармора. Конечно, движение частиц микромира не описывается классической механикой, но сравнить, хотя бы грубо, предсказания «классики» с тем, что дает квантовая механика, можно. Итог вычисления таков: излучается энергия

$$E_{\text{изл}} = \int_R^{\infty} \frac{2kq^2 a^2}{3c^3} dt = \frac{1}{7,5\sqrt{2}} \cdot \frac{m}{c^3} \left(\frac{kq^2}{mR} \right)^{5/2}.$$

Выражение в круглых скобках имеет размерность квадрата скорости. Из формулы видно, что полученное значение энергии излучения гораздо меньше кинетической энергии, приобретенной электроном.

А вот если теперь электрон «зацепится» за протон и будет излучен квант света, то кинетическая энергия электрона уменьшится в два раза и у системы протон-электрон появится момент импульса. При этом «улетевший» квант света унесет с собой и недостающую энергию, и импульс, и такой момент импульса, что суммарный момент импульса протона, электрона и фотона будет таким же, каким он был до образования связанной системы частиц протон-электрон. Таким образом, очевидно, что «классика» не может описать квантовые свойства рассматриваемой системы.

3. Из уравнения движения заряженной частицы в магнитном поле $qvB = mv^2/R$ найдем скорость движения протона: $v = qBR/m \approx 10^7$ м/с. Полученная величина существенно меньше скорости света, поэтому для расчетов движения можно пользоваться классической механикой. Радиус кривизны траектории выразим через кинетическую энергию E и получим $R = (2mE)^{1/2}/(qB)$. Квадрат ускорения тоже может быть выражен через кинетическую энергию: $a^2 = 4E^2/(mR)^2$.

Подставим эти выражения в формулу Лармора:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{kq^2}{c^3} \frac{4E^2}{(mR)^2} = -\frac{4}{3} \frac{kq^4 B^2}{(mc)^3} E,$$

или

$$\frac{dE}{E} = -Adt.$$

Это простое дифференциальное уравнение, решение которого есть экспонента

$$E_t = E_0 \exp(-At).$$

Чтобы радиус кривизны траектории уменьшился в два раза, кинетическая энергия должна уменьшиться в 4 раза, т.е. должно быть выполнено условие $\exp(-At) = 0,25$. Это означает, что должно пройти время $t = \ln 4/A$.

4. Понятно, что изменение скорости будет малым в сравнении с самой скоростью. Поэтому эта задача может быть без труда решена читателями самостоятельно.

**Физико-математическая олимпиада
«Физтех»**

Математика

10 класс

Вариант 1

1. а) 90° ; б) $\frac{9\sqrt{7}}{4}$.

а) Точки P и T лежат на окружности с диаметром BD , поэтому $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$. Следовательно, треугольники ADP и DCT прямоугольные; PM и TN — их медианы. Так как медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна ее половине, $TN = CN = DN$, $PM = AM = DM$. Пусть $\angle TCD = \gamma$. Поскольку треугольник CTN равнобедренный, то $\angle CTN = \gamma$, $\angle TND = 2\gamma$ (как внешний угол $\triangle CTN$). Углы PMA и TND равны в силу параллельности прямых PM и TN . А так как треугольник AMP также равнобедренный, то $\angle PAM = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle PMA = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle TND = 90^\circ - \gamma$.

Значит, сумма углов A и C треугольника ABC равна 90° , и его третий угол $\angle ABC$ также равен 90° .

б) В силу сказанного выше $CD = 2NT = 5$, $AD = 2MP = 1$. Обозначим $\angle ADB = \psi$. Тогда $\angle BDC = 180^\circ - \psi$. По теореме косинусов для треугольников ABD и ACD получаем, что $AB^2 = 4 + 1 - 4\cos\psi$, $BC^2 = 25 + 4 - 20\cos(180^\circ - \psi)$. Но по теореме Пифагора $AB^2 + BC^2 = AC^2 = 36$, откуда следует, что $\cos\psi = \frac{1}{8}$. Далее находим

$$\sin\psi = \sqrt{1 - \cos^2\psi} = \frac{3\sqrt{7}}{8},$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} =$$

$$= \frac{1}{2} DA \cdot DB \sin\psi + \frac{1}{2} DC \cdot DB \sin(180^\circ - \psi) = \frac{9\sqrt{7}}{4}.$$

2. 5, $\frac{2 - 3\sqrt{11}}{2}$.

Обозначим $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = t$. Возводя обе части этого равенства в квадрат, получаем $(x+4) - 2\sqrt{(x+4)(6-x)} + (6-x) = t^2$, откуда $2\sqrt{24+2x-x^2} = 10 - t^2$. Уравнение принимает вид $t+4 = 10 - t^2$; отсюда $t = 2$ или $t = -3$. Далее рассматриваем каждый из случаев в отдельности:

$$t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+4 = 4 + 6 - x + 4\sqrt{6-x},$$

$$-4 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{6-x} = x-3, \\ -4 \leq x \leq 6, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x = -3 \text{ или } x = 5, \\ 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

и, следовательно, $x = 5$;

$$t = -3 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{x+4} = -7 - 2x, \\ -4 \leq x \leq 6, \end{cases}$$

откуда

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 \pm 3\sqrt{11}}{2}, \\ -4 \leq x \leq -3,5 \end{cases}$$

и, следовательно, $x = \frac{2 - 3\sqrt{11}}{2}$.

3. $(-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$.

Первое уравнение можно преобразовать так:

$$(4y^2 + 4(2x - 5a)y) + 5x^2 - 22ax + 26a^2 = 0,$$

откуда получаем

$$(2y + 2x - 5a)^2 + (x - a)^2 = 0.$$

Отсюда находим, что координаты точки $A(x_A; y_A)$ удовлетворяют равенствам $2x + 2y - 5a = 0$ и

$$x - a = 0, \text{ т.е. } x_A = a, y_A = \frac{3a}{2}.$$

Так как второе уравнение задает параболу, то $a \neq 0$. При этом условии уравнение можно переписать в виде $y = x^2 + 2ax + \left(a^2 + \frac{1}{a}\right)$. Координаты точки B следующие: $x_B = -a, y_B = y(-a) = \frac{1}{a}$.

Обозначим $f(x; y) = 3x - y - 4$. Точки A и B лежат по разные стороны от прямой $3x - y - 4$

тогда и только тогда, когда $f(x_A; y_A)$ и $f(x_B; y_B)$ – числа разных знаков. Последнее равносильно неравенству $f(x_A; y_A)f(x_B; y_B) < 0$. Имеем

$$\left(\frac{3}{2}a - (3a - 4)\right)\left(\frac{1}{a} - (-3a - 4)\right) < 0,$$

откуда находим ответ.

4. $(1; \pm 1), (-1; \pm 1)$.

Введем новые переменные $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 y^2$.

Тогда $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 y^2 = u^2 - 2v$, и система принимает вид

$$\begin{cases} \frac{2}{u} + v = 2, \\ u^2 + v = 5. \end{cases}$$

Из первого уравнения $v = 2 - \frac{2}{u}$; подставляем это выражение во второе уравнение и решаем его; находим $u = -1$, $u = 2$.

Так как $u > 0$, то подходит только значение $u = 2$. Значит, $v = 1$, и в исходных переменных получаем

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x^2 y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 - y^2, \\ (2 - y^2)y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = y^2 = 1.$$

Отсюда следует, что система имеет 4 решения: $(1; \pm 1), (-1; \pm 1)$.

5. 370330.

Возможны два случая.

1) Оба выбранных узла лежат на указанных в условии прямых. На каждой из них внутри квадрата лежат по 58 точек, причем повторяющихся среди них нет (точка пересечения прямых имеет нецелые координаты). Для выбора первой точки есть 116 способов, а для выбора второй – на 3 меньше (подходят все точки, кроме первой и двух точек, лежащих с первой на той же горизонтали или вертикали). При этом мы учитывали упорядоченные пары точек, поэтому каждую пару точек мы посчитали дважды. Значит, в этом случае получаем $\frac{116 \cdot 113}{2} = 6554$ способа.

2) Ровно один из выбранных узлов лежит на данных в условии прямых. Выберем сначала узел, лежащий на одной из прямых (116 способов). Посчитаем, сколько после этого есть способов выбрать второй узел. Всего в квадрате отмечены 58^2 узлов; из них мы должны исключить узлы на диагоналях (116 штук), а также узлы, стоящие с выбранным на одной горизонтали (56 штук с учетом исключенных ранее диагональных) или на одной вертикали (56 штук). Отсюда второй узел можно выбрать $58^2 - 116 - 112 = 3136$ способами, а количество способов выбрать пару узлов равно $116 \cdot 3136 = 363776$.

Сложив полученные числа, получаем ответ.

6. б) $\frac{79}{100}$.

а) Несложно показать, что $ABCD$ – равнобедренная трапеция или прямоугольник, поэтому вокруг $ABCD$ можно описать окружность, назовем ее Ω . Диагонали четырехугольника $CODT$ точкой пересечения делятся пополам, поэтому он параллелограмм, и при этом $\angle CTD = \angle COD = 180^\circ - \angle AOD = 120^\circ$. Поскольку $\angle CAD = 60^\circ$, в четырехугольнике $CADT$ сумма противоположных углов равна 180° , и вокруг него также можно описать окружность. Следовательно, все 5 точек A, B, C, T, D лежат на окружности Ω .

Углы ATB и ACB вписаны в Ω и опираются на одну дугу, поэтому они равны, и $\angle ATB = 60^\circ$. Далее отметим, что $\angle DBT = \angle DCT$ (вписанные, опираются на одну дугу), $\angle DCT = \angle BDC$ (поскольку $BD \parallel CT$), $\angle BDC = \angle BAC$ (трапеция равнобедренная).

Отсюда следует, что $\angle ABT = \angle ABD + \angle DBT = \angle ABD + \angle BAC = 180^\circ - \angle AOB = 60^\circ$. Итак, доказано, что в треугольнике ABT два угла равны 60° , поэтому он равносторонний.

б) По теореме косинусов из треугольника ABO находим $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos 120^\circ = 79$. Тогда площадь S_1 треугольника ABT равна

$AB^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{79\sqrt{3}}{4}$. Площадь трапеции S_2 находим как полупроизведение диагоналей, умноженное

на синус угла между ними: $S_2 = \frac{100\sqrt{3}}{4}$. Отсюда

$S_1 : S_2 = 79 : 100$.

11 класс

Вариант 1

1. $(15; 22), (22; 15)$.

Пусть $\sqrt{3x - 2y} = a$, $\sqrt{3y - 2x} = b$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} a + b = 7, \\ \left(\frac{a^2 - b^2}{5}\right)^2 = a^2 + b^2 + 12. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы $b = 7 - a$. Подставляем во второе уравнение и решаем его:

$$\frac{1}{25}(a^2 - (7 - a)^2)^2 = a^2 + (7 - a)^2 + 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (14a - 49)^2 = 25(2a^2 - 14a + 61),$$

откуда $a = 6$, $a = 1$.

Значит, возможны две пары $(a; b)$: $(6; 1)$ и $(1; 6)$.

Далее находим x и y .

Если $a = 6, b = 1$, то

$$\begin{cases} \sqrt{3x-2y} = 6, \\ \sqrt{3y-2x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y = 36, \\ 3y-2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 22, \\ y = 15. \end{cases}$$

Если $a = 1, b = 6$, то, аналогично, $x = 15, y = 22$.
2. 40596.

Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy и квадрат $ABCD$ со стороной, равной 200, вершины которого имеют следующие координаты: $A(200;0), B(200; 200), C(0; 200), D(0; 0)$. Посчитаем количество прямоугольников, стороны которых параллельны сторонам исходного квадрата. У каждого такого прямоугольника есть пара противоположных сторон, равных стороне квадрата, поэтому он определяется парой точек, лежащих либо на AD , либо на CD . Количество способов выбрать две точки на CD равно C_{201}^2 . Столько же способов имеется для выбора двух точек на AD . Исходный квадрат $ABCD$ посчитан нами дважды, поэтому искомое количество прямоугольников равно $2C_{201}^2 - 1 = 2 \cdot \frac{201 \cdot 200}{2} - 1 = 40199$.

Теперь посчитаем количество прямоугольников, стороны которых не параллельны сторонам исходного квадрата. Рассмотрим точки $N(a;0)$ и $M(0;b)$, где $0 < a < 200, 0 < b < 200$. Пусть $MNKL$ – прямоугольник с вершинами на сторонах квадрата $ABCD$, причем K лежит на AB , а L на CB . Пусть $\angle MLC = \alpha$. Тогда $\angle CML = 90^\circ - \alpha, \angle BLK = 180^\circ - \angle KLM - \angle CLM = 90^\circ - \alpha$. Аналогично доказывается, что острые углы прямоугольных треугольников AKN, DMN, BKL равны α и $90^\circ - \alpha$. Таким образом, по второму признаку равенства треугольников $\triangle LCM = \triangle NAK, \triangle MDN = \triangle KBL$. Следовательно, точки K и L имеют координаты $K(200;200 - b), L(200 - a;200)$. Это означает, что каждый прямоугольник однозначно определяется парой чисел $(a;b)$. Далее заметим, что прямоугольные треугольники LCM и MDN подобны (по двум углам), откуда следует, что

$$\frac{CL}{CM} = \frac{MD}{DN} \Leftrightarrow \frac{200 - a}{200 - b} = \frac{b}{a}.$$

Преобразуя последнее равенство, получаем, что $(a - b)(a + b) = 200(a - b)$, т.е. либо $a = b$, либо $a + b = 200$. (Можно отметить, что в первом случае стороны прямоугольника $KLMN$ параллельны диагоналям квадрата, а во втором случае $KLMN$ является квадратом.) Таким образом, выбрав точку $N(a;0)$, мы можем определить остальные вершины прямоугольника $MNKL$. Каждому значению a из отрезка $[1;199]$ соответствуют два значения b ($b = a$ и $b = 200 - a$). Но если $a = 100$, то эти два значения совпадают, и

выходит только один прямоугольник вместо двух. Итак, число прямоугольников, стороны которых не параллельны сторонам исходного квадрата, равно $2 \cdot 199 - 1 = 397$.

Окончательно, искомое число прямоугольников равно $40199 + 397 = 40596$.

3. а) Меньшая сфера касается граней $ABCD, ABB_1A_1$ и BCC_1B_1 , большая сфера – граней $A_1B_1C_1D_1, ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1$ и AA_1D_1D ;

б) $r = \frac{5}{2} \cdot \frac{BQ}{BD} = \frac{80}{351}$.

а) Назовем больший шар Ω , а меньший – ω . Параллелепипед симметричен относительно плоскости BB_1D_1D , а прямая B_1Q лежит в этой плоскости. Центр шара ω лежит на B_1Q (значит, и в плоскости BB_1D_1D), и ω касается грани AA_1B_1B , поэтому ω также касается грани BB_1C_1C . Отсюда следует, что ω не может касаться граней AA_1D_1D и CC_1D_1D . (Если бы шар касался хотя бы одной из этих граней, то в силу указанной выше симметрии он касался бы и второй грани, и тогда он касался бы всех четырех боковых граней параллелепипеда. Это означало бы, что радиус ω максимально возможный для шара, расположенного внутри параллелепипеда, а это противоречит условию, так как внутри параллелепипеда есть еще шар Ω большего радиуса.)

Заметим также, что ω не может касаться грани $A_1B_1C_1D_1$, так как расстояние от любой точки отрезка B_1Q до этой грани больше, чем расстояние до грани ABB_1A_1 . Действительно, расстояние от Q до грани $A_1B_1C_1D_1$ равно 16, а расстояние от Q до грани ABB_1A_1 не превосходит стороны основания, т.е. 13. Для произвольной точки отрезка B_1Q расстояния до указанных граней уменьшаются пропорционально. Значит, ω касается грани $ABCD$ (иначе ω касался бы только двух граней, а это бы означало, что Ω касается всех шести граней, что невозможно).

Тогда Ω касается пяти граней параллелепипеда: всех боковых граней и основания $A_1B_1C_1D_1$, а его радиус R равен половине стороны основания, т.е. $R = \frac{13}{2}$.

б) Рассмотрим плоскость BB_1D_1D . Обозначим центр Ω через O , центр ω через P , радиус ω через r , точку касания S с плоскостью $A_1B_1C_1D_1$ через K , точку касания ω с $ABCD$ через T . Пусть H и F – проекции O и P на ребро BB_1 соответственно, а прямые PF и KO пересекаются в точке E .

Далее находим:

$$OH = R\sqrt{2}, FP = r\sqrt{2},$$

$$PE = FE - FP = OH - FP = R\sqrt{2} - r\sqrt{2},$$

$OP = R + r$ (в силу касания шаров),

$$OE = \sqrt{OP^2 - PE^2} = \sqrt{(R+r)^2 - 2(R-r)^2} = \sqrt{6rR - r^2 - R^2},$$

$$BB_1 = BF + FH + HB_1 = TQ + OE + KO = r + OE + R = R + r + \sqrt{6rR - r^2 - R^2}.$$

По условию $BB_1 = 16$, а выше было найдено, что $R = \frac{13}{2}$. Получаем и решаем уравнение:

$$\frac{19}{2} - r = \sqrt{39r - r^2 - \frac{169}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{19}{2} - r \geq 0, \\ \frac{361}{4} - 19r + r^2 = 39r - r^2 - \frac{169}{4}, \end{cases}$$

откуда находим $r = \frac{5}{2}$.

Теперь найдем отношение $BQ:BD$. Из подобия треугольников PQT и B_1QB следует, что $BQ : TQ = BB_1 : PT = 16 : \frac{5}{2} = \frac{32}{5}$.

Так как $BQ = BT + TQ = r\sqrt{2} + TQ = \frac{5}{\sqrt{2}} + TQ$, то последнее соотношение можно записать в виде $\frac{5}{TQ\sqrt{2}} + 1 = \frac{32}{5}$, откуда $TQ = \frac{25}{27\sqrt{2}}$. В итоге получаем $BQ = \frac{32TQ}{5} = \frac{80\sqrt{2}}{27}$, $BD = AD\sqrt{2} = 13\sqrt{2}$,

$$\frac{BQ}{BD} = \frac{80}{351}.$$

4. $x = -\text{arccctg}4 + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = -\text{arccctg}\sqrt{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Данное уравнение равносильно уравнению $2\cos^4 x + 3\sin 4x - 2\sin 2x = \sin^2 2x$ при условии $\sin 2x \leq 0$. Преобразуем уравнение (приводим его к однородному уравнению относительно $\sin x$ и $\cos x$):

$$\begin{aligned} 2\cos^4 x + 6\sin 2x \cos 2x - 4\sin x \cos x &= \\ = (2\sin x \cos x)^2 \Leftrightarrow \cos^4 x + 6\sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) - \\ - 2\sin x \cos x (\cos^2 x + \sin^2 x) &= 2\sin^2 x \cos^2 x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos^4 x + 4\cos^3 x \sin x - \\ - 2\cos^2 x \sin^2 x - 8\cos x \sin^3 x &= 0. \end{aligned}$$

Если $\sin x = 0$, то из уравнения следует, что $\cos x = 0$, а это невозможно. Значит, $\sin x \neq 0$, и, разделив обе части уравнения на $\sin^4 x$, получаем равносильное уравнение $\text{ctg}^4 x + 4\text{ctg}^3 x - 2\text{ctg}^2 x - 8\text{ctg} x = 0$,

откуда

$$\begin{aligned} \text{ctg}^3 x (\text{ctg} x + 4) - 2\text{ctg} x (\text{ctg} x + 4) &= 0, \\ \text{ctg} x (\text{ctg} x + 4) (\text{ctg}^2 x - 2) &= 0, \end{aligned}$$

т.е.

$$\text{ctg} x = -4, \text{ctg} x = 0 \text{ или } \text{ctg} x = \pm\sqrt{2}.$$

Учтем неравенство $\sin 2x \leq 0$. Из формулы

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = \frac{2\sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{2\text{ctg} x}{1 + \text{ctg}^2 x}$$

следует, что знак $\sin 2x$ совпадает со знаком $\text{ctg} x$, поэтому подходят все неположительные значения $\text{ctg} x$. Значит, $x = -\text{arccctg}4 + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = -\text{arccctg}\sqrt{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. $(-\infty; -5] \cup [-1; 0) \cup [5; +\infty)$.

Закфиксируем какое-либо значение x . При этом левая часть неравенства обращается в константу, а в правой остается выражение, зависящее только от p , т.е. мы получим неравенство вида $C \leq g(p)$. Для того чтобы оно выполнялось при любом p , необходимо и достаточно, чтобы минимальное значение правой части было не меньше C . Поскольку приведенное выше рассуждение справедливо для произвольного значения x , условию задачи удовлетворяют все значения x такие, что

$$4 \log_{x^2+5} \left(\frac{6x}{x-2} \right) + \log_{x^2+5} (x-2)^4 \leq \min_p (2^{x-p} + 2^{2+p-x}),$$

где в правой части записано ее минимальное значение по переменной p .

Согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим, $2^{x-p} + 2^{2+p-x} \geq 2\sqrt{2^{x-p} \cdot 2^{2+p-x}} = 4$, причем равенство достигается при $2^{x-p} = 2^{2+p-x}$, т.е. при $p = x - 1$. Это означает, что при любом значении x минимальное по p значение правой части равно 4, и необходимо решить неравенство

$$4 \log_{x^2+5} \left(\frac{6x}{x-2} \right) + \log_{x^2+5} (x-2)^4 \leq 4.$$

ОДЗ неравенства определяется условиями $x^2 + 5 > 0$, $x^2 + 5 \neq 1$, $\frac{6x}{x-2} > 0$, $(x-2)^4 > 0$. Первые два выполнены при всех x , последнее — при $x \neq 2$, а из третьего неравенства $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. Таким образом, $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. Упрощаем и решаем неравенство (учитываем, что основание логарифма больше 1 при всех x ; под равносильностию ниже понимаются равносильные на ОДЗ преобразования):

$$\begin{aligned} 4 \log_{x^2+5} \left(\frac{6x}{x-2} \right) + \log_{x^2+5} (x-2)^4 \leq 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_{x^2+5} (6x)^4 \leq \log_{x^2+5} (x^2+5)^4 \end{aligned}$$

Это неравенство приводится к виду

$$(x + 5)(x + 1)(x - 5)(x - 1) \geq 0,$$

откуда $x \in (-\infty; -5] \cup [-1; 1] \cup [5; +\infty)$. Учитывая ОДЗ, получаем ответ.

6. а) $AM \cdot CN = MN^2/4 = 25$; б) $AM = 1$.

Вариант 2

1. -6; -5; -4; -2; -1; 0.

Обозначим разность прогрессии через d . Данные в условии неравенства можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{cases} (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) > S + 1, \\ (a_1 + 6d)(a_1 + 10d) < S + 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 > S + 1, \\ a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 < S + 17. \end{cases}$$

Вычитая из второго неравенства первое (а это можно сделать, так как они разного знака), получаем $5d^2 < 16$. Из условия следует, что $d \in \mathbb{N}$, поэтому $d = 1$. Тогда $a_{10} = a_1 + 9$ и $S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 10a_1 + 45$, и система неравенств принимает вид

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 45 + 1, \\ a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 45 + 17, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} a_1 \neq -3, \\ a_1 \in (-3 - \sqrt{11}; -3 + \sqrt{11}). \end{cases}$$

Так как $a_1 \in \mathbb{Z}$, то $a_1 \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$.

2. $\sqrt{34} \pm \sqrt{23}$.

Пусть E – середина AB , CE и DE – медианы равнобедренных треугольников ABC и ABD , а значит, биссектрисы и высоты. Тем самым, $AB \perp CE$, $AB \perp DE$. Значит, отрезок AB перпендикулярен плоскости CDE , следовательно, $AB \perp CD$. Таким образом, AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, обозначим эту плоскость через α . Сечение цилиндра этой плоскостью – окружность, а AB является хордой этой окружности. Тогда радиус цилиндра минимален, если AB – диаметр. Отметим, что это возможно в силу того, что отрезки DE и CE длиннее, чем $\frac{1}{2}AB = 1$. Действительно, из треугольников ACE и ADE следует, что $CE = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6}$, $DE = \sqrt{6^2 - 1^2} = \sqrt{35}$.

Рассмотрим тетраэдр, в котором AB является диаметром цилиндра. Возможны 2 случая: точки C и D лежат по одну или по разные стороны плоскости α .

Пусть H – проекция точек C и D на плоскость α . Угол AHB равен 90° , так как он вписан в окружность и опирается на ее диаметр; $AH = BH$ в силу равенства треугольников ACH и BCH . Тогда $AH = BH = \sqrt{2}$. По теореме Пифагора в прямоугольных треугольниках AHC и DHC соответственно: $CH = \sqrt{25 - 2} = \sqrt{23}$, $DH = \sqrt{36 - 2} = \sqrt{34}$. Тогда, если точки C и D лежат по одну сторону от плоскости α , то $CD = DH - CH = \sqrt{34} - \sqrt{23}$.

Если точки C и D лежат по разные стороны от плоскости α , то $CD = DH + CH = \sqrt{34} + \sqrt{23}$.

3. $6\pi - \sqrt{3}$.

Второе неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \leq 2a + 2b, \\ a^2 + b^2 \leq 2. \end{cases}$$

Значит, исходная система равносильна следующему:

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 2, \\ a^2 + b^2 \leq 2a + 2b, \\ a^2 + b^2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - x)^2 + (b - y)^2 \leq 2, \\ (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \leq 2, \\ a^2 + b^2 \leq 2. \end{cases} \quad (1)$$

Множества точек, задаваемых этими неравенствами на плоскости $(a; b)$ (x и y при этом выступают в роли параметров), – это круги ω_1 , ω_2 , ω_3 радиуса $\sqrt{2}$ с центрами $P(x; y)$, $B(1; 1)$, $A(0; 0)$ соответственно. Условие задачи означает, что система (1) должна иметь решение относительно $(a; b)$, т.е. все три круга должны иметь по крайней мере одну общую точку.

Пусть окружности, ограничивающие ω_2 и ω_3 , пересекаются в точках C и D (тогда треугольники ABC и ABD – равносторонние). Пересечение кругов ω_2 и ω_3 есть фигура F , представляющая собой совокупность двух меньших сегментов этих кругов, ограниченных хордой CD . Тогда фигура M состоит из всевозможных точек $(x; y)$, находящихся на расстоянии не более $\sqrt{2}$ от фигуры F . (Это совокупность всех кругов радиуса $\sqrt{2}$, центры которых принадлежат фигуре F .)

Пусть точки P и Q симметричны точкам A и B (соответственно) относительно точки C ; точки T и R симметричны точкам A и B (соответственно) относительно точки D . Нетрудно понять, что M есть объединение четырех секторов (центральный угол всех секторов меньше 180°):

- сектор PAT круга с центром в точке A и радиусом AP ,
- сектор QBR круга с центром в точке B и радиусом BQ ,
- сектор PCQ круга с центром в точке C и радиусом CP ,

сектор RDT круга с центром в точке D и радиусом DT .

Заметим, что первые два сектора пересекаются по ромбу $ACBD$ и никаких других пересечений между секторами нет. При этом первые два сектора равны между собой, и последние два сектора также равны между собой. Таким образом, площадь фигуры M равна

$$S_M = S_{PAT} + S_{QBR} + S_{PCQ} + S_{RDT} - S_{ACBD} = \\ = 2 \cdot \frac{\pi(2\sqrt{2})^2}{3} + 2 \cdot \frac{\pi(\sqrt{2})^2}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{2})^2 = 6\pi - \sqrt{3}.$$

4. 7560.

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2}$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2}$, $c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2}$ (никаких других простых множителей числа a , b , c содержать не могут – иначе нарушается второе условие системы). Отсюда

$$\text{НОК}(a; b; c) = 2^{\max(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)} \cdot 3^{\max(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)}, \\ \text{НОД}(a; b; c) = 2^{\min(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)} \cdot 3^{\min(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)}.$$

Учитывая данную в условии систему, получаем соотношения

$$\begin{cases} \max(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1) = 15, \\ \min(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1) = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \max(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2) = 16, \\ \min(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2) = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим первую систему (2). Возможны следующие наборы чисел:

(1; 1; 15) – 3 набора (за счет различных перестановок этих чисел);

(1; 15; 15) – также три набора;

(1; k ; 15), где $2 \leq k \leq 14$ – есть 13 различных значений k , и для каждого из них 6 перестановок – всего 78 вариантов.

Итак, имеется $3 + 3 + 6 \cdot 13 = 84$ способа выбрать тройку чисел $(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$. Аналогично устанавливаем, что для выбора $(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$ имеется $3 + 3 + 6 \cdot 14 = 90$ способов, а так как один выбор осуществляется независимо от другого, общее количество способов равно $84 \cdot 90 = 7560$.

5. $x = 2$.

Из условия следует, что функции $4x + 1$, $\frac{x}{2} + 2$, $5x - 1$ положительны и не принимают значения 1 при всех x из области допустимых значений. Пусть

$$a = \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1), \quad b = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right), \\ c = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1).$$

Тогда

$$abc = \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) \cdot \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) \cdot \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = \\ = 2\log_{5x-1}(4x+1) \cdot 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) \cdot \frac{\log_{4x+1}(5x-1)}{\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)} = 4.$$

По условию числа $(a; b; c)$ удовлетворяют одному из трех условий:

$$a = b \text{ и } a = c + 1; \quad (3)$$

$$b = c \text{ и } c = a + 1; \quad (4)$$

$$c = a \text{ и } a = b + 1. \quad (5)$$

Рассмотрим случай (3). Подставляя $b = a$ и $c = a - 1$ в полученное выше уравнение $abc = 4$, имеем $a \cdot a \cdot (a - 1) = 4$, откуда $a^3 - a^2 - 4 = 0$, $(a - 2)(a^2 + a + 2) = 0$. Так как многочлен $a^2 + a + 2$ не имеет корней, то единственным решением уравнения является $a = 2$, поэтому системе удовлетворяет тройка чисел $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$. Случаи (4) и (5) рассматриваются аналогично; из них получаем, что либо $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$, либо $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$. Теперь для каждой из полученных троек чисел $(a; b; c)$ найдем x .

Если $c = 1$, то $5x - 1 = \frac{x}{2} + 2$, т.е. $x = \frac{2}{3}$. Поэтому $a = 2\log_{\frac{11}{3}} \frac{11}{3} \neq 2$ и значений x , при которых $a = b = 2$, $c = 1$, не существует.

Если $a = 1$, то $4x + 1 = \sqrt{5x - 1}$. Возводя обе части последнего уравнения в квадрат, получаем уравнение $16x^2 + 3x + 2 = 0$, которое не имеет корней, поэтому случай $a = 1$, $b = c = 2$ также не подходит.

Если $b = 1$, то $\left(\frac{x}{2} + 2\right)^2 = 4x + 1$. Это уравнение эквивалентно уравнению $x^2 - 8x + 12 = 0$, корнями которого являются $x = 2$ и $x = 6$, но $x = 6$ не подходит, так как в этом случае $a = \log_{\sqrt{29}} 25 \neq 2$. Значение $x = 2$ подходит: $a = \log_{\sqrt{9}} 9 = 2$, $c = \log_3 9 = 2$.

Итак, $x = 2$ – единственное решение задачи.

6. а) $S_{ABC} = 25$, б) $AC = \frac{50}{\sqrt{42}}$.

Так как прямые TC и TA – касательные к ω , они перпендикулярны радиусам, проведенным в точки касания, и $\angle OCT = \angle OAT = 90^\circ$. Отсюда следует, что точки A и C лежат на окружности с диаметром OT , назовем эту окружность Ω . На этой же окружности лежит точка P , поскольку она лежит на окружности, проходящей через точки A , O , C . Обозначим $\angle ABC = \beta$. Тогда по свойству угла между хордой и касательной получаем, что $\angle TAC = \beta$. Далее, $\angle TPC = \angle TAC = \beta$ (углы, вписанные в окружность Ω). Из того, что $\angle TPC = \angle ABC$, следует, что $AB \parallel PT$.

Так как у треугольников APK и CPK общая высота, проведенная из вершины P , то их площади относятся как основания, т.е. $CK : AK =$

$= S_{\Delta CPK} : S_{\Delta APK} = 4 : 6 = 2 : 3$. Треугольники ABC и KPC подобны, поскольку $PK \parallel AB$, и коэффициент подобия k равен $\frac{AC}{CK} = \frac{AK+KC}{CK} = 1 + \frac{AK}{CK} = \frac{5}{2}$. Но тогда $S_{ABC} = k^2 S_{\Delta CPK} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 4 = 25$.

б) Поскольку $\angle ABC$ острый, то $\angle AOC = 2\angle ABC = 2\beta$ (центральный угол вдвое больше вписанного), $\angle APC = 2\angle AOC = 2\beta$ (вписанные в Ω углы, опирающиеся на одну дугу). Следовательно, PK – биссектриса треугольника ACP . Биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально двум другим сторонам, поэтому $CP : AP = CK : AK = 2 : 3$. Пусть $CP = 2y$, тогда $AP = 3y$.

Из дополнительного условия $\beta = \arctg \frac{7}{5}$. Следовательно,

$$\cos 2\beta = \frac{\cos^2 \beta - \sin^2 \beta}{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = -\frac{12}{37},$$

$$\sin 2\beta = \sqrt{1 - \cos^2 2\beta} = \sqrt{\left(1 + \frac{12}{37}\right)\left(1 - \frac{12}{37}\right)} = \frac{35}{37}.$$

Площадь треугольника ACP равна $\frac{1}{2} \cdot CP \cdot AP \sin 2\beta = \frac{105}{37} y^2$, откуда получаем $\frac{105}{37} y^2 = 10$, $y^2 = \frac{74}{21}$.

По теореме косинусов из треугольника APC находим, что $AC^2 = \frac{625}{37} y^2$ и, значит, $AC = \frac{25\sqrt{2}}{\sqrt{21}}$.

Физика

9 класс

1. Пусть A – точка броска, B – точка максимального подъема, C – точка столкновения. Тогда время $t_{AC} = t_{BC} = \tau$, $t_{AB} = 2\tau$, $t_{AC} = 3\tau$.

$$1) h = \frac{1}{2} g (2\tau)^2 = 2g\tau^2.$$

$$2) h - H = \frac{1}{2} g\tau^2, H = h - \frac{1}{2} g\tau^2 = \frac{3}{2} g\tau^2.$$

$$3) \frac{s_1}{s_2} = \frac{h + (h - H)}{H} = \frac{2h - H}{H} = \frac{5}{3}.$$

(Задачу можно решить и другими способами.)

2. Обозначим $S = 8 \text{ см}^2$, $m_1 = 50 \text{ г}$, $m = 120 \text{ г}$.

1) Давление непосредственно под поршнем равно $p = p_0 - \rho g H = 99 \text{ кПа}$.

2) Условие равновесия поршня: $p_0 S + m_1 g - m_2 g = (p_0 - \rho g H) S$. Отсюда $m_2 = m_1 + \rho H S = 130 \text{ г}$.

3) Пусть поршень находится ниже уровня воды в сосуде на H_1 . Условие равновесия поршня

имеет вид

$$(p_0 + \rho g H_1) S + m_2 g = (m_1 + m) g + p_0 S,$$

откуда находим

$$H_1 = \frac{m_1 + m - m_2}{\rho S} = 5 \text{ см}.$$

3. Сопrotивление лампочки зависит от тока в ней.

$$1) I_1 = \frac{P_1}{U_0} = \frac{5}{3} \text{ А} \approx 1,67 \text{ А}.$$

$$2) I_2 = \frac{P_2}{U_0/2} = 1,1 \text{ А}.$$

$$3) P_3 = P_1 = 20 \text{ Вт}.$$

4. 1) Из уравнения движения клина $\frac{H}{\sin \alpha} =$

$$= \frac{1}{2} (g \sin \alpha) t_1^2 \text{ находим } t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g \sin^2 \alpha}} = \frac{5}{3} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

2) Пусть $M = 3m$ – масса клина, a – ускорение клина, a_0 – ускорение шайбы относительно клина, N – сила нормальной реакции клина на шайбу. Ускорение шайбы равно сумме переносного (ускорение клина) и относительного ускорений. Уравнение движения клина в проекциях на горизонтальную ось: $N \sin \alpha = Ma$. Уравнение движения шайбы в проекциях на нормаль к поверхности клина: $N - mg \cos \alpha = -ma \sin \alpha$.

Отсюда

$$a = \frac{mg \cos \alpha \sin \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} = \frac{1}{7} g.$$

3) Уравнение движения шайбы в проекциях на ось вдоль поверхности клина: $mg \sin \alpha = m(a_0 - a \cos \alpha)$. Тогда

$$a_0 = g \sin \alpha + a \cos \alpha = \frac{5}{7} g.$$

Уравнение движения шайбы относительно клина:

$$\frac{H}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} a_0 t_2^2, \text{ откуда}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2H}{a_0 \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{14H}{3g}}.$$

5. 1) $vT \cdot S = \pi H^2 \cdot H$, откуда время наполнения бака

$$T = \frac{\pi H^3}{vS} = \frac{\pi \sqrt{2} H^3}{S \sqrt{gH}}.$$

2) Начало координат поместим в конец шланга, оси x и y направим горизонтально направо и вертикально вверх. Тогда $x = v \cos \alpha \cdot t$, $y = v \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$. Найдем угол, при котором струя попадет в точку A :

$$H = v \cos \alpha \cdot t, -H = v \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2;$$

исключая время t с учетом выражения для v , получаем $tg^2 \alpha - tg \alpha = 0$; отсюда $tg \alpha = 1$ или $tg \alpha = 0$. Имеем два значения угла: $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 0$. 3) Найдем углы, при которых струя попадет в дальнюю верхнюю точку B бака:

$$3H = v \cos \alpha \cdot t, \quad -H = v \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2;$$

исключая время t с учетом выражения для v , получаем

$$9tg^2 \alpha - 3tg \alpha + 8 = 0;$$

это уравнение не имеет корней, следовательно, ни при каких углах струя не достигнет точки B . Итак, чтобы попасть в бак, струя должна выходить под такими углами, чтобы $0 < tg \alpha < 1$ (или $0 < \alpha < 45^\circ$).

10 класс

1. Пусть A – точка броска, B – точка максимального подъема, C – точка столкновения. Тогда время $t_{AC} = t_{BC} = \tau$, $t_{AB} = 2\tau$, $t_{ABC} = 3\tau$.

$$1) v_0 = g \cdot 2\tau, \quad \tau = \frac{v_0}{2g}, \quad t = 3\tau = \frac{3v_0}{2g}.$$

$$2) \frac{t_1}{t_2} = \frac{3\tau}{\tau} = 3.$$

$$3) H = v_0\tau - \frac{1}{2}g\tau^2 = \frac{3v_0^2}{8g}.$$

(Задачу можно решить и другими способами.)

2. Плотность шара $\rho_0 = 6\rho$, его объем $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $r = \frac{3}{2}R$ – расстояние от центра шара до оси вращения.

$$1) N_1 = \rho_0 Vg - \rho Vg = (\rho_0 - \rho)Vg = \frac{20}{3}\pi R^3 \rho g.$$

2) Горизонтальная составляющая силы Архимеда $F_{A1} = \rho V \cdot \omega^2 r$. Вертикальная составляющая силы Архимеда $F_{A2} = \rho Vg$. На шар действуют еще сила N_2 со стороны дна, сила Q со стороны стенки и сила тяжести, равная $\rho_0 Vg$. По второму закону Ньютона для шара в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси

$$F_{A1} + Q \sin \alpha = \rho_0 V \cdot \omega^2 r,$$

$$F_{A2} + N_2 - \rho_0 Vg - Q \cos \alpha = 0.$$

Отсюда, с учетом выражений для ρ_0 , V и r , находим

$$N_2 = (\rho_0 - \rho)V \left(\frac{\omega^2 r}{tg \alpha} + g \right) = \frac{20}{3}\pi R^3 \rho (\omega^2 R + g).$$

3. Обозначим $T = 354$ К, $p_H = 5 \cdot 10^5$ Па, V_1 – начальный объем, V_2 – конечный объем пара.

1) При сжатии часть пара превратится в воду и пар станет насыщенным, поэтому $p_1 = \frac{p_H}{3,6} \approx 0,14 \cdot 10^5$ Па.

$$2) p_1 V_1 = \frac{m}{M} RT, \quad V_1 = 7V_2, \quad \text{начальная масса пара}$$

$$m = \frac{p_H M V_2}{RT} \cdot \frac{7}{3,6} \approx 10^{-3} \text{ кг} = 1 \text{ г}.$$

$$4. 1) \frac{H}{\sin \alpha} = \frac{1}{2}g \sin \alpha \cdot t_1^2, \quad t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g \sin^2 \alpha}} = \frac{5}{4} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

2) Пусть $M = 2m$ – масса клина, a – ускорение клина, a_0 – ускорение шайбы относительно клина, N – сила нормальной реакции клина на шайбу. Ускорение шайбы равно сумме переносного (ускорение клина) и относительного ускорений. Уравнение движения клина в проекциях на горизонтальную ось: $F - N \sin \alpha = Ma$. Уравнение движения шайбы в проекциях на нормаль к поверхности клина: $N - mg \cos \alpha = ma \sin \alpha$. Отсюда

$$a = \frac{F - mg \cos \alpha \sin \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} = \frac{13}{66}g.$$

3) Уравнение движения шайбы в проекциях на ось вдоль поверхности клина: $mg \sin \alpha = m(a_0 + a \cos \alpha)$, откуда $a_0 = g \sin \alpha - a \cos \alpha = \frac{15}{22}g$.

Уравнение движения шайбы относительно клина: $\frac{H}{\sin \alpha} = \frac{1}{2}a_0 t_2^2$, откуда

$$t_2 = \sqrt{\frac{2H}{a_0 \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{11H}{3g}}.$$

5. 1) $pV = \nu RT$, $(p + \Delta p)(V + \Delta V) = \nu R(T + \Delta T)$, $\frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\Delta T}{T}$, $\frac{\Delta p}{p} = -0,01$, $\frac{\Delta V}{V} = 0,02$, тогда $\frac{\Delta T}{T} = 0,01$, т.е. температура увеличилась на 1%.

2) $\Delta Q = \Delta U + A$, $\Delta U = \nu \cdot \frac{3}{2}R\Delta T$, $A = p\Delta V$, тогда

$$\frac{\Delta Q}{\Delta U} = 1 + \frac{2}{3} \frac{\Delta V/V}{\Delta p/p + \Delta V/V} = \frac{7}{3}.$$

11 класс

1. Пусть M – масса шара, m – масса клина, a – ускорение клина, T – сила натяжения нити.

1) Ускорение шара относительно клина тоже a . Ускорение шара $a_{\text{ш}}$ равно сумме переносного и относительного ускорений (рис.7), $\beta = 90^\circ - \alpha/2$,

$$\sin \beta = \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad tg \beta = \frac{3}{2}.$$

2) Уравнение движения шара в проекциях на ось, перпендикулярную нити: $Ma \sin \alpha = Mg \cos \alpha$, откуда

$$a = \frac{g}{tg \alpha} = \frac{g \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{5}{12}g.$$

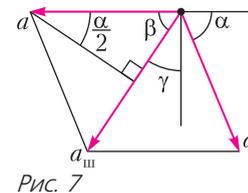


Рис. 7

3) Уравнения движения в проекциях на горизонтальную ось для шара и клина: $M(a - a \cos \alpha) = T \cos \alpha$, $ma = T - T \cos \alpha$. Отсюда

$$\frac{M}{m} = \frac{\cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2} = \frac{65}{64}.$$

4) Относительно стола $H = \frac{1}{2} a \sin \alpha \cdot t^2$. Так как

$$a = \frac{g}{\operatorname{tg} \alpha}, \text{ то } t = \sqrt{\frac{2H}{g \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{26H}{5g}}.$$

Замечание. Время можно найти, рассмотрев движение шара относительно клина.

2. Площадь под графиком зависимости теплоемкости от температуры есть количество теплоты, полученное газом. Зависимость линейная. При изменении температуры от T_0 до T

$$Q = v \cdot \frac{1}{2} (C(T) + C(T_0))(T - T_0).$$

$$1) -Q_1 = v \cdot \frac{1}{2} \left(C\left(\frac{3}{5}T\right) + C(T_0) \right) \left(\frac{3}{5}T_0 - T_0 \right) = -\frac{24}{25} vRT_0,$$

$$Q_1 = \frac{24}{25} vRT_0.$$

$$2) Q(T) = v \cdot \frac{1}{2} (C(T) + C(T_0))(T - T_0) =$$

$$= vR \cdot \frac{3}{2} \left(1 + \frac{T}{T_0} \right) (T - T_0), \quad Q(T) = v \cdot \frac{3}{2} R(T - T_0) + A,$$

$$A = \frac{3vR}{2T_0} (T - T_0)T. \text{ Имеем параболическую зависимость. Минимальная работа } A_{\min} \text{ совершается при } T_{\min} = \frac{1}{2} (T_0 + 0) = \frac{1}{2} T_0.$$

$$3) A_{\min} = A(T_{\min}) = -\frac{3}{8} vRT_0 < 0.$$

3. 1) До замыкания напряжение на конденсаторе емкостью C_2 равно $U_{02} = \frac{\mathcal{E}C_1}{C_1 + C_2} = \frac{4}{5}\mathcal{E}$. Ток $I_{0R} = \frac{U_{02}}{R} = \frac{4}{5} \frac{\mathcal{E}}{R}$.

2) Работа источника $A = Q + \Delta W_C$, $A = \mathcal{E} \left(C_1 \mathcal{E} - \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \mathcal{E} \right) = \frac{C_1^2}{C_1 + C_2} \mathcal{E}^2$. Изменение энергии конденсаторов $\Delta W_C = \frac{1}{2} C_1 \mathcal{E}^2 - \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \mathcal{E}^2 = \frac{1}{2} \frac{C_1^2}{C_1 + C_2} \mathcal{E}^2$. Отсюда $Q = \frac{1}{2} \frac{C_1^2}{C_1 + C_2} \mathcal{E}^2 = \frac{8}{5} C \mathcal{E}^2$.

3) Пусть в некоторый момент после замыкания заряд левой обкладки конденсатора емкостью C_1 равен q_1 , а заряд нижней обкладки конденсатора емкостью C_2 равен q_2 . Тогда $-\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = 0$. За малое время Δt будет $\Delta \left(-\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} \right) = 0, -\frac{\Delta q_1}{\Delta t C_1} +$

$$+ \frac{\Delta q_2}{\Delta t C_2} = 0, -\frac{I_1}{C_1} + \frac{I_2}{C_2} = 0, \frac{I_1}{C_1} = \frac{I_2}{C_2}. \text{ У нас } \frac{I_1}{4} = I_2,$$

$$I_1 = I_0, I_2 = \frac{1}{4} I_0. \text{ Ток в резисторе } I = I_1 + I_2 = \frac{5}{4} I_0.$$

$$\text{Напряжение на резисторе } U = IR = \frac{5}{4} I_0 R.$$

4. 1) Начальный ток $I_0 = \frac{Bv_0 L}{R_1 + R_2}$. Ускорение

$$\text{первой перемычки } a_{01} = \frac{BI_0 L}{m_1} = \frac{B^2 v_0 L^2}{m_1 (R_1 + R_2)} = \frac{1}{8} \frac{B^2 v_0 L^2}{mR}.$$

2) Суммарная сила, действующая на перемычки, равна нулю. Поэтому $m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v$, $v = 2v_0/3$.

3) Пусть в произвольный момент v_1 и v_2 - скорости перемычек, s_1 и s_2 - их пути, I - ток. Тогда

$$m_2 \frac{\Delta v_2}{\Delta t} = BIL = BL \frac{Bv_1 L - Bv_2 L}{R_1 + R_2},$$

$$m_2 \Delta v_2 = BL \frac{Bv_1 \Delta t L - Bv_2 \Delta t L}{R_1 + R_2} = \frac{B^2 L^2}{R_1 + R_2} (\Delta s_1 - \Delta s_2).$$

Суммируем: $m_2 (v - 0) = \frac{B^2 L^2}{R_1 + R_2} (s_1 - s_2)$. Надо

найти $s = s_0 - (s_1 - s_2)$. С учетом соотношения $v = 2v_0/3$ находим $s = s_0 - \frac{8v_0 R m}{3B^2 L^2}$.

5. На рисунке 8 построено изображение $A_1 B_1$, рассматриваемое глазом Г. У нас фокусное расстояние линзы $F = 18$ см, $d = 72$ см, $d_0 = 24$ см.

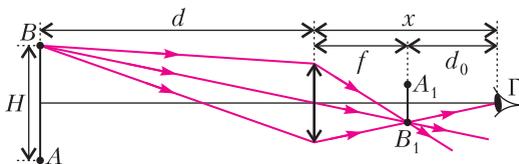


Рис. 8

$$1) f = \frac{dF}{d - F} = 24 \text{ см}, \quad x = f + d_0 = 48 \text{ см}.$$

2) На рисунке показан ход лучей через линзу от точки B при минимальном диаметре линзы D_{\min} .

Пусть $A_1 B_1 = h$. Тогда $h = \frac{f}{d} H = 3$ см, $\frac{D_{\min}}{h} = \frac{x}{d_0}$,

$$D_{\min} = \frac{hx}{d_0} = 6 \text{ см}.$$

3) Все лучи, попавшие в зрачок глаза после прохождения линзы, должны выйти из точки, сопряженной зрачку в линзе: $\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{F}$. Экран надо поместить на главной оптической оси линзы слева от линзы на расстоянии

$$z = \frac{xF}{x - F} = 28,8 \text{ см}.$$

**Новосибирский
государственный университет**

Физика

Олимпиада

«Твой путь в настоящую науку»

I (отборочный) этап

Устный тур

8 класс

1. $h = \sqrt{\frac{3}{2}} l.$

2. В $\frac{4}{3}$ раза.

3. $F_3 = 3F_2 - 3F_1.$

4. $T_0 = T_1 - \frac{T_2 - T_1}{\frac{(\Delta T / \Delta t)_1}{(\Delta T / \Delta t)_2} - 1} = 60^\circ\text{C} - \frac{80 - 60}{\frac{30/2}{20/2} - 1}^\circ\text{C} = 20^\circ\text{C}.$

9 класс

1. $t = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 50 \text{ с}.$

2. $S' = S \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}.$

3. $a = \frac{M - m}{2m} g$ (с таким ускорением движется меньший груз, а ускорение большего груза равно нулю).

4. $BD = 2\sqrt{\frac{M^2 b^2 - m^2 a^2}{M^2 - m^2}}.$

10 класс

1. В 2,4 раза.

2. $L = 2R \sqrt{1 + \omega^2 \frac{2h}{g}}.$

4. $v = \sqrt{\pi g R}$ (в системе отсчета, движущейся горизонтально со скоростью v , колесо вращается на месте вокруг своей оси, а кусочек грязи отрывается вертикально вверх со скоростью v).

11 класс

1. $v = \frac{\pi}{2} \sqrt{gR}$ (мальчик бросил снежок под углом 45° к горизонту).

2. Заряд вылетит из конденсатора под углом $\alpha' = \alpha$ если $T - |qU| < T \cos^2 \alpha$. В противном случае $\alpha' = \arccos \sqrt{\frac{T}{T - |qU|}} \cos \alpha$.

3. $M = \frac{\rho S}{2g}$ (рассмотрите систему, состоящую из двух поршней и слоя газа между ними; на нее

действуют такие силы: сила тяжести пластин (вниз), сила давления газа верхней части сосуда (вниз) и сила давления газа нижней части сосуда (вверх); баланс сил сохраняется и после зарядки поршней).

4. Плотность должна быть достаточно высока, чтобы сила тяжести не давала обломкам разлететься под действием центробежной силы. Другими словами, ускорение свободного падения g на поверхности астероида должно быть больше, чем центростремительное ускорение $a_{\text{цс}}$.

Масса астероида M равна произведению его плотности ρ и объема $\frac{4\pi}{3} R^3$, где R – радиус астероида. Согласно закону всемирного тяготения Ньютона,

$$g = \frac{GM}{R^2} = G\rho \frac{4\pi}{3} R.$$

Наибольшее центростремительное ускорение достигается на экваторе астероида и равно

$$a_{\text{цс}} = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R,$$

Запишем условие $g > a_{\text{цс}}$:

$$G\rho \frac{4\pi}{3} R > \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R,$$

откуда получим минимальную плотность астероида:

$$\rho_{\text{min}} = \frac{3\pi}{GT^2}.$$

II (заключительный) этап

8 класс

1. $v_{\text{II}} = \frac{1}{2} v_{\text{I}} = 6 \text{ км/ч}.$

2. В первом случае весь азот испарится, вся вода замерзнет, а лед охладится. В сосуде установится температура

$$T_1 = T_0 - \frac{L_a m_a - \lambda_l m_l}{c_l m_l} \approx -126^\circ\text{C}.$$

Во втором случае часть азота не испарится, и в сосуде установится температура

$$T_2 = T_a = -196^\circ\text{C}.$$

3. $\rho = \rho_0 \frac{t_1}{t_1 + (t_3 - t_2)} = \frac{2}{5} \rho_0$ ($t_1 = 2 \text{ с}$ – первая точка излома графика, когда шайба перестает касаться дна сосуда; $t_2 = 10 \text{ с}$ – вторая точка излома, когда шайба касается верхней части бутылки; $t_3 = 13 \text{ с}$ – третья точка излома, когда вода начинает заполнять горлышко сосуда).

4. $H_2 = \Delta H + \Delta h \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right).$

9 класс

- $v_{\Pi} = \frac{3}{4}v_T = 9 \text{ км/ч.}$
- $T = \frac{\alpha_1 L_1 T_1 + \alpha_2 L_2 T_2}{\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2}.$
- $m = \frac{3P}{g} = 15 \text{ кг.}$
- $v = \sqrt{gL\left(2 + \frac{M}{m}(\sqrt{5} - 1)\right)}$ (согласно закону сохранения энергии, кинетическая энергия бу- синки равна изменению потенциальной энергии системы).

10 класс

- $v_{2y} = v_{1y} + (v_{1x} - v_{2x})\frac{x_2}{y_2} = -5 \text{ м/с}$
(проекции скоростей концов стержня на сам стержень должны быть одинаковыми, иначе длина стержня менялась бы со временем).
- $L' = L\left(1 + \alpha\left(\frac{T_2 + T_1}{2} - T\right)\right)$ (распределение тем- пературы вдоль стержня будет линейным).
- $p = \frac{\rho g}{S} \frac{V_1 V_2 V_3}{V_3(V_3 + V_2) - V_1(V_1 - V_2)}.$
- $m = \frac{2R\phi}{L - 2R\phi} M.$
- $x = \frac{\mu k L^2}{mg}.$

11 класс

- $v_{2y} = v_{1y} + \frac{v_{1x} - v_{2x}}{\sqrt{3}}$ (проекции скоростей кон- цов стержня на сам стержень одинаковы).
- $x = \frac{p_0}{\rho g}.$
- $t = \sqrt{\frac{2a_1 l}{a_1^2 + a_2^2}}.$
- $\frac{U_2}{U_1} = \left(1 - \frac{\Delta d}{d}\right)\sqrt{1 - \frac{\Delta d}{x}}$ (когда конденсатор находится в равновесии, сила натяжения пружин уравновешивается силой электростатического притяжения пластин).
- Введем некоторые обозначения: H – высота дома, m – масса капли, v – скорость капли перед ударом, a – высота капли, S – площадь ее поперечного сечения, ρ – плотность воды. Силу F давления капли при ударе об асфальт можно оценить как отношение импульса капли mv к времени ее соприкосновения с асфальтом, равно- му a/v :

$$F = \frac{mv}{a/v}.$$

Скорость капли $v = \sqrt{2gH}$ (при падении с высо- ты пятиэтажного дома сопротивлением воздуха можно пренебречь). Массу капли оценим как $m = \rho Sa$, считая для простоты, что капля имеет форму цилиндра. Подставляя эти оценки, най- дем силу давления и само давление:

$$F = 2\rho gHS, p = \frac{F}{S} = 2\rho gH.$$

С учетом числовых значений $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $g \approx 10 \text{ м/с}^2$, $H \approx 15 \text{ м}$, получим $p \approx 3 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

6. Решетку можно рассматривать как набор не- прозрачных прутьев, расположенных на одина- ковом расстоянии друг от друга. Каждый прут создает на экране область затенения, состоящую из тени и двух полутеней (рис. 9; вид сверху).

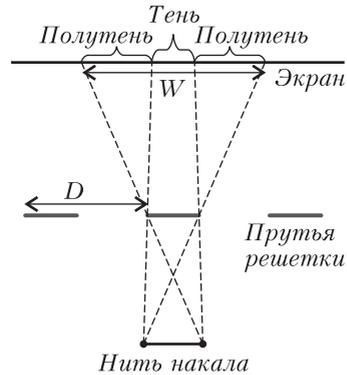


Рис. 9

Тень не освещена лампой: прут решетки загора- живает всю нить накала лампы. Полутень час- тично освещена: прут закрывает только левую (или только правую) часть нити накала.

В исходном положении экрана ширина области затенения W немного превышает период решетки d . Поэтому области полутени от соседних прутьев перекрываются (рис.10). Места пере- крытия соседних полутеней – это и есть узкие темные полосы. Они темнее окружающих участ- ков полутеней, так как в полутени решетка заго- раживает только левый или правый край нити накала, а в месте перекрытия полутеней она загорживает оба края нити накала. В резуль- тате узкие темные полосы освещаются только сред- ней частью нити накала, которая составляет лишь малую долю (около 1/3) от всей нити.

Когда решетку приблизили к экрану, ширина

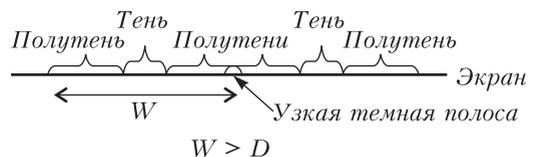


Рис. 10

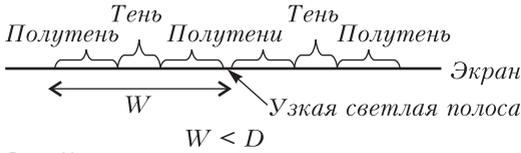


Рис. 11

области затенения W уменьшилась и стала немного меньше d . Поэтому между областями полутеней от соседних прутьев появились зазоры (рис. 11). Эти зазоры и являются светлыми полосами на экране, поскольку они полностью освещены лампой.

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ России

Математика

1. а) 1024; б) 2^{19} .

а) Из условия очевидно, что максимальное количество цветов в букете равно 11.

Первый способ. Используя свойство биномиальных коэффициентов

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1},$$

а также учитывая их комбинаторный смысл, получим, что число способов сформировать букет из нечетного количества цветов не более 11 оттенков (при условии, что ни один оттенок не должен повторяться) равно

$$C_{11}^1 + C_{11}^3 + C_{11}^5 + \dots + C_{11}^{11} = 2^{10} = 1024.$$

Второй способ. Рассмотрим 10 цветов 10 различных оттенков. Собрать букет из этих цветов без учета четности можно 2^{10} способами. Если в букете нечетное количество цветов, то мы его оставляем, если же четное – добавляем неиспользованный одиннадцатый цветок. Таким образом, общее количество способов собрать букет равно 2^{10} .

б) Решение аналогично п. а).

2. 3.

Так как уравнение $x^2 - ax + b = 0$ имеет единственный корень, то $b = \frac{a^2}{4}$. По теореме Виета имеем равенства $a + b = 5p$; $ab = 2p^3$. Подставляя $b = \frac{a^2}{4}$ в последнее равенство, получим $a = 2p$. Учитывая, что a и b отличны от нуля, найдем $p = 3$.

3. Например,

$$\begin{cases} (x-1)(x-2)(x-3) = 0, \\ (|x-1| + |y-1|)(|x-2| + |y-2|)(|x-3| + |y-4|) = 0. \end{cases}$$

4. $f(x) = \frac{c}{x}$, $c > 0$.

Пусть M – точка пересечения отрезков OB и AH_A . Так как площади треугольника AOB и трапеции ABH_BH_A равны между собой, то площади треугольников AMO и трапеции MBH_BH_A также равны между собой. Отсюда следует, что равны и площади треугольников AOH_A и трапеции BOH_B . Пусть абсциссы точек H_A и H_B равны x и t соответственно. Тогда имеем равенство $x \cdot f(x) = t \cdot f(t)$. При фиксированном t получаем $f(x) = \frac{c}{x}$, $c > 0$.

5. 2.

Если отразить точку D относительно прямой AF , а затем относительно прямой AE , то она перейдет в точку B . Действительно, композиция двух осевых симметрий относительно пересекающихся прямых – это поворот на удвоенный угол между прямыми. Таким образом, в нашем случае эти две симметрии эквивалентны повороту на угол 90° относительно точки A .

Это означает, что образ точки D при симметрии относительно AF и образ точки B при симметрии относительно AE – это одна и та же точка; на рисунке 12 она обозначена K . Из точки K отрез-

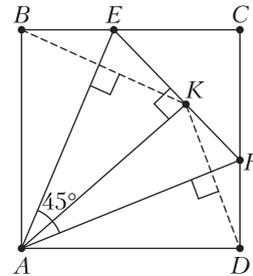


Рис. 12

ки AE и AF видны под углом 90° (при симметрии сохраняются величины углов, поэтому, например, углы ABE и AKE равны). Значит, точка K – это основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую EF .

И, наконец, поскольку $BE = EK$ и $DF = FK$ (при симметрии длины отрезков сохраняются), видим, что периметр треугольника CEF равен сумме длин сторон BC и CD квадрата.

6. 0,5.

Первый способ. Заметим, что $g(2x) = 16f(x)$. Поэтому x_1 – корень $f(x)$ тогда и только тогда, когда $2x_1$ – корень $g(x)$. Следовательно, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}$.

Второй способ. Сравнение коэффициентов многочленов

$f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4$ и $g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$ показывает, что в соответствии с формулами Виета корни многочлена $g(x)$ являются удвоенными корнями многочлена $f(x)$.

7. 43.

Рассмотрим строго возрастающую последовательность значений:

$$\sqrt{86}, \sqrt{86 + 41\sqrt{86}}, \sqrt{86 + 41\sqrt{86 + 41\sqrt{86}}}, \dots$$

Если эта последовательность ограничена сверху, то значением F является точная верхняя граница, и тогда F — действительное число. Таким образом, достаточно доказать ограниченность указанной последовательности. Докажем, что эта последовательность сверху ограничена числом 43. Действительно,

$$\sqrt{86} < 43, \text{ следовательно, } 41\sqrt{86} < 41 \cdot 43,$$

$$\text{откуда } 86 + 41\sqrt{86} < 86 + 41 \cdot 43 = 43^2,$$

$$\text{значит, } \sqrt{86 + 41\sqrt{86}} < 43 \text{ и т.д.}$$

Очевидно из условия, что F является положительным корнем уравнения $F^2 = 86 + 41F$. Отсюда находим $F = 43$.

8. 1) Верно. Если множество A или множество B бесконечно, то и множество C будет бесконечно. Поэтому можем обозначить через a, b, c максимальные элементы этих множеств соответственно и заметить для решения п.3, что $a + b = c$. Отдельно отметим, что такие множества существуют: например, $A = \{0, \dots, a\}$, $B = \{0, \dots, c - a\}$. 2) Верно. Через разложение по биному доказывается, что a целое. Тогда если бы B содержало нецелые числа, то и C содержало бы нецелые. Поэтому все элементы множества B целые. Отсюда аналогично получаем, что все элементы множества A целые.

3) Верно.

$$\text{Заметим, что } 2020 = 5 \cdot 404, \quad 2828 = 7 \cdot 404,$$

$$a < 1 + a_1, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \left((\sqrt{2} + 1)^5 \right)^{404} = (41 + 29\sqrt{2})^{404} = \\ &= (82.0\dots)^{404} < 127^{404} = \\ &= 128^{404} \left(1 - \frac{1}{128} \right)^{404} < 2^{7 \cdot 404} \left(1 - \frac{1}{128} \right) < 2^{2828} - 2. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } b = c - a > 2^{2828} - (1 + 2^{2828} - 2) = 1.$$

9. Остальные четыре корня имеют вид $t = \cos \varphi$, где $\varphi \in \{78^\circ, 150^\circ, 222^\circ, 294^\circ\}$.

Сделаем замену $t = \cos \varphi$. Уравнение примет вид $32 \cos^5 \varphi - 40 \cos^3 \varphi + 10 \cos \varphi = \sqrt{3}$. Преобразуя левую часть, получим

$$2 \cos \varphi (16 \cos^4 \varphi - 20 \cos^2 \varphi + 5) = 2 \cos 5\varphi,$$

откуда $\cos 5\varphi = \sqrt{3}/2$ и $\varphi = \pm \frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$. Поскольку у первоначального уравнения ровно пять действительных корней (по условию), то, чтобы

их предъявить, достаточно взять какие-нибудь пять значений φ , косинусы которых различны. Например, $\varphi \in \{6^\circ, 78^\circ, 150^\circ, 222^\circ, 294^\circ\}$.

Физика

9 класс

$$1. F = m \left(g + \frac{v^2}{R} \right) = 30750 \text{ Н.}$$

$$2. H = \frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2}.$$

$$3. u = \sqrt{v_1^2 - 2v_1 v_0 \cos \alpha + 2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

4. $\alpha_{\min} = \arctg \frac{1 - k_{II} k_c}{2k_{II}}$, при $k_{II} = 0$ равновесие возможно лишь при $\alpha = \pi/2$.

$$5. \Delta L = L \frac{T - T_0}{(n+1)(T + nT_0)}.$$

10 класс

$$1. \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \approx 1,05.$$

$$2. P = \mathcal{E}I - \mathcal{E} \frac{I^2}{I_0} = 8 \text{ Вт.}$$

$$\begin{aligned} 3. p_1 = p_b = \frac{m_b RT}{M_b V} \approx 1,2 \text{ МПа, } p_2 = p_b + p_k + p_a = \\ = \frac{m_b RT}{M_b V} + \frac{m_k 3RT}{M_k V} + \frac{m_a 3RT}{M_a 2V} \approx 2,9 \text{ МПа, } p_3 = \\ = p_b + p_a = \frac{p_b RT}{M_b V} + \frac{m_a 3RT}{M_a 2V} \approx 1,6 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

$$4. a = \frac{mv^4}{4Fs^2} = 0,25 \text{ м/с}^2.$$

$$5. q = 8\pi R \sqrt{\sigma \epsilon_0 R} = 20 \text{ нКл.}$$

11 класс

$$3. \Delta R = \frac{3q|\Delta T|}{4\pi GRT\Delta\rho}.$$

$$4. f = \sqrt{\frac{(NScm - \kappa\alpha l^2 l^2 \rho t)(Scm + \alpha l^2 l^2 \rho t)}{4m^3 l S^2 c^2}}.$$

Математика и криптография

1. 34179.

2. 8.

3. 2187.

4. 120.

5. ВЕКТОР.

7. МОСКВА.

	№ журнала	с.		№ журнала	с.
Памяти В.И.Голубева	4	26	Марки к 200-летию П.Л.Чебышёва	5	2-я с. обл.
Памяти Ю.М.Брука	5	16	Три периода изучения теории вероятностей.	5	26
Памяти Н.Н.Константинова	7	29	<i>А.Ширяев</i>		
Статьи по математике			Задачник «Кванта»		
Десятая проблема Гильберта. <i>Ю.Матиясевич</i>	2	2	Задачи М2634 – М2681, Ф2641– Ф2688	1–12	
Изобретая логарифмическую линейку. <i>В.Клетцын</i>	9	9	Решения задач М2618 – М2665, Ф2625–Ф2672	1–12	
Кратчайшие пути и гипотеза Пуанкаре (окончание). <i>В.Протасов</i>	1	12	О взвешивании весов. <i>А. Грибалко,</i> <i>А.Заславский, О.Манжина</i>	2	24
Линейная независимость радикалов. <i>А.Канунников, И.Воробьев</i>	3	12	Одноцветный треугольник площади 1 на покрашенной плоскости. <i>В.Брагин</i>	5	37
–«–	4	6	Педальные отрезки: где максимум? <i>М.Дидин, П.Кожевников</i>	6	18
Необычное определение конических сечений. <i>Л.Емельянов</i>	11-12	2	Погода в пустыне Сахара. <i>С.Варламов</i>	2	28
Об одной задаче В.А.Сендерова. <i>Н.Сафаеи</i>	10	2	Полимино. <i>Ю.Маркелов, А.Сайранов</i>	1	36
О распределении пар взаимно простых чисел. <i>А.Рябченко</i>	5	13	Скрытая симметрия. <i>Е.Бакаев</i>	6	22
Теория чисел в работах Чебышёва. <i>М.Королев</i>	8	2	«Квант» для младших школьников		
Чебышёв, Абель и эллиптические интегралы. <i>А.Веселов</i>	7	2	Задачи	1–12	
Чебышёв и теория приближений. <i>В.Протасов</i>	6	2	Статьи по математике		
Статьи по физике			В поисках оптимальных построений. <i>Г.Филитовский</i>	9	25
Андрей Дмитриевич Сахаров	5	2	Мешает ли птицам попутный ветер. <i>Н.Константинов</i>	7	31
Атмосфера Земли и современная энергетика. <i>С.Гандилян</i>	11-12	5	Статьи по физике		
Белые карлики – кристаллические звезды. <i>Ю.Брук, Б.Геллер</i>	5	17	Перечитывая фантастов. <i>С.Парновский</i>	6	24
Время жизни шипучей таблетки в стакане воды. <i>А.Митрофанов</i>	9	2	Почему самолет взлетает против ветра. <i>С.Дворянинов</i>	1	39
–«–	10	12	Таинственная шкала, или Небольшое расследование. <i>С.Дворянинов</i>	8	22
Неопределенность – основа квантовой физики. <i>А.Варламов, Ж.Виллен,</i> <i>А.Ригамонти</i>	1	2	Фантастика и реальность. <i>С.Дворянинов</i>	7	36
Поэзия и законы физики. <i>А.Стасенко</i>	8	10	Что такое шпунтик? <i>С.Дворянинов</i>	9	24
Тепловое расширение. <i>Е.Соколов</i>	2	9	Конкурс имени А.П.Савина		
Термоэлектричество: от дуги Алессандро Вольта до феррожидкостных термоэлектрических генераторов. <i>А.Варламов, С.Шарапов, Ю.Шикина</i>	7	8	Задачи	1–4, 9–12	
Удар и его окрестности. <i>Л.Ашкинази</i>	6	5	Итоги конкурса 2020/21 учебного года	6	26
Черные дыры существуют. <i>Л.Белопухов</i>	3	2	Калейдоскоп «Кванта»		
Эгоцентризм, системы мира и воздушный шарик. <i>Е.Соколов</i>	4	2	М а т е м а т и к а		
Из истории науки			Конические сечения	11-12	32
Бывают ли отрицательные цифры? <i>Д.Златопольский</i>	4	11	Механизмы П.Л.Чебышёва	5	«
К 130-летию И.М.Виноградова	9	13	О трех равных отрезках	1	«
К 200-летию П.Л.Чебышёва. <i>В.Козлов</i>	5	25	Посмотрим на чертеж с разных сторон	9	«
			Ф и з и к а		
			Вычисления и оценки	8	32
			Модели и идеализации	10	«
			Размерность и подобие	6	«
			Физика и геометрия (планиметрия)	2	«
			Физика и геометрия (стереометрия)	3	«
			Физические измерения	7	«

Школа в «Кванте»

М а т е м а т и к а

Ищем «экстремальный» экстремум.
В.Голубев 4 26

Ф и з и к а
В космос – на безвоздушном шаре?
Л.Ашкинази 10 23

Где достать поляризованный свет?
М.Старшов 2 35

Гидроудар и пробой электрокабеля.
А.Стасенко 11-12 22

Как Толик Втулкин физикой увлекся.
С.Дворянинов 3 34

Лунный тормоз, столкновение с Тейей
и закон сохранения момента импульса.
С.Парновский 5 39
«Не забудьте про часы!» *С.Парновский* 8 25

Физический факультатив

Закон Архимеда и закон сохранения
энергии. *С.Дворянинов* 5 41

Издалека долго течет река...
А.Стасенко 6 36

Как возникает хаос. Законы равновесного
хаоса идеального газа. *А.Власов* 4 30

Кто искривил пространство-время?
А.Стасенко 10 26

Механизм излучения ускоренно движущегося
заряда. *С.Варламов* 11-12 24

Об одной олимпиадной задаче по физике.
Г.Гайдуков, А.Румянцев 7 37

Ртуть и вода – диффузия и испарение.
Л.Ашкинази 1 42

Фазовые диаграммы колебательных систем.
Ф.Белов 9 29

Энергия ионизации водородоподобных
ионов. *С.Варламов* 8 31

Математический кружок

Апельсины, канализационные люки
и разрезание длинного прямоугольника.
А.Акопян 9 40

Двоичная арифметика Франческо
Брунетти. *Д.Златопольский* 11-12 27

Задача о шаре в треугольной призме.
Г.Шарыгин 6 27

Задача Произволова о сумме модулей.
Е.Бакаев 1 44

Нетранзитивные кости. *А.Нестеренко* 10 30

Подобие с медианами. *Д.Швецов* 7 42

Построение средней линии трапеции.
А.Грибалко 8 27

Раскраска таблицы в три цвета. *А.Богаз,
Л.Радзивиловский* 3 37

Снова теорема Штейнера – Лемуса.
З.Дегтярева, Д.Максимов 2 37

Лаборатория «Кванта»

Загадка плоского стекла. *Л.Ашкинази* 9 43

Падение магнита в алюминиевой трубке.
А.Князев, А.Князев (мл.) 1 50

Наши наблюдения

Капли тумана в луче света. *О.Птушенко,
В.Птушенко* 11-12 29

Кротовые норы на льду моря. *Е.Краснова,
В.Птушенко* 2 49

Что такое дождевание. *С.Дворянинов* 6 38

Олимпиады

Всероссийская олимпиада по физике
имени Дж.К.Максвелла 7 51

Заключительный этап XLVII Всероссийской
олимпиады школьников по математике 7 48

Заключительный этап LV Всероссийской
олимпиады школьников по физике 7 53

Избранные задачи XXVI Турнира
имени А.П.Савина 9 46

LXII Международная математическая
олимпиада 8 36

XXVIII Международная олимпиада
школьников «Туймаада». Физика 8 38

Международная физическая олимпиада 10 39

LXXXIV Московская математическая
олимпиада школьников 6 40

Московская олимпиада школьников
по физике 2021 года 6 42

Региональный этап XLVII Всероссийской
олимпиады школьников по математике 3 42

Региональный этап LV Всероссийской
олимпиады школьников по физике.
Первый тур 2 43

Региональный этап LV Всероссийской
олимпиады школьников по физике.
Второй тур 3 44

XLII Турнир городов. Задачи весеннего
тура 5 44

XLII Турнир городов. Задачи осеннего
тура 2 41

Экзаменационные материалы

ЕГЭ по физике 9 48

Институт криптографии, связи
и информатики Академии ФСБ
России 11-12 42

Московский государственный
технический университет
имени Н.Э.Баумана 10 53

Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова. Физика 9 54

№ журнала с.

№ журнала с.

Национальный исследовательский университет «МИЭТ»	8	41
Новосибирский государственный университет	11-12	37
Олимпиада «Ломоносов». Физика	4	36
Олимпиада «Покори Воробьевы горы!»	1	53
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого	10	47
Физико-математическая олимпиада «Физтех»	11-12	30
Информация		
Заочная школа СУНЦ НГУ	6	51
Очередной набор в ВЗМШ	5	47
Игры и головоломки		
Метрический кроссворд	10	4-я с. обл.
Неисчерпаемый танграм	9	22
Нам пишут		
Вокруг задачи М852	8	12
«Квант» улыбается		
Баллада об астронавте	5	23
Вниманию наших читателей 1-11-12		
Коллекция головоломок		
Неисчерпаемый танграм	9	2-я с. обл.
—«—	10	«
—«—	11-12	«
Пять кубов	7	«
Стелс	8	«
Лингвистические задачи		
Время по-венгерски	4	2-я с. обл.
Глаголица	1	«
Другой русский язык	6	«
С индонезийского на китайский	3	«
Японский глагол	2	«
Шахматная страничка		
Возвращение в элиту	8	3-я с. обл.
Кризис варианта	2	«
На пути к олимпу	10	«
На российских полях	7	«
Новый претендент	4	«
Позиционная жертва	3	«
Психология решает	5	«
Радостные шахматы	1	«
Рекордная партия	11-12	«
Турнир в Бухаресте	6	«
Шахматы-960	9	«

Прогулки с физикой

«Ветру и орлу... нет закона»	8	4-я с. обл.
Вода, вода, кругом вода	7	«
Горячий душ и занавеска	4	«
Длительность суток	5	«
Заморозки и ... дождевание	6	«
Зимнее «дыхание» моря	2	«
Как взлетает самолет	1	«
«Отпустите меня в Гималаи...»	3	«
Свет и туман	11-12	«
Через оконное стекло	9	«

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

**ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ
РЕДАКТОР**

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами**

**в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8**

Тел.: (831) 216-40-40

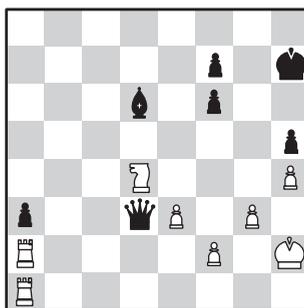
Рекордная ПАРТИЯ

Уверенной победой действующего чемпиона завершился матч на первенство мира между Магнусом Карлсеном и Яном Непомнящим. Решающей в поединке оказалась 6 партия, которую в упорной борьбе выиграл норвежский гроссмейстер. Эта партия стала рекордной в истории матчей за шахматную корону по числу сделанных ходов – 136.

М.Карлсен – Я.Непомнящий
Дубай, 2021, 6 партия

1. d4 ♠f6 2. ♠f3 d5 3. g3 e6
4. ♠g2 ♠e7 5. 0-0 0-0 6. b3 c5
7. dc ♠c5 8. c4 dc 9. ♠c2 ♠e7
10. ♠bd2! Предлагая жертву пешки, белые стремятся к подобному варианту: 10...cb
11. ♠b3 ♠b6 12. a4 ♠c7 13. ♠c7 ♠c7 14. ♠a3 ♠d8 15. ♠d4 с мощным давлением на ферзевом фланге. 10...♠c6! 11. ♠c4 b5 12. ♠ce5 ♠b4 13. ♠b2 ♠b7 14. a3 ♠c6 15. ♠d3 ♠b6 16. ♠g5 ♠fd8 17. ♠f6 gf 18. ♠ac1 ♠d4 19. ♠d4 ♠d4 20. ♠a2 ♠g2 21. ♠g2 ♠b7+ 22. ♠g1 ♠e4 23. ♠c2 a5 24. ♠fd1 ♠g7 25. ♠d2 ♠ac8. Надежнее 25...b4, но Ян, видимо, рассчитывал поиграть на победу. 26. ♠c8 ♠c8 27. ♠c8 ♠d5 28. b4 a4 29. e3 ♠e5. Интереснее 29...♠b2, вынуждая белых пойти на 30. ♠c5 ♠d6 31. ♠b2 ♠d3 32. ♠bc2 с разменом пешек на ферзевом фланге и ничьей. 30. h4 h5 31. ♠h2 ♠b2? Уже поздно, так как белые успели перестроиться. 32. ♠c5! ♠d6 33. ♠d1? В цейтноте Магнус прошел мимо 33. ♠cc2! ♠a3 34. ♠f4 ♠b4 35. ♠d7 с решающей атакой. 33...♠a3 34. ♠b5 ♠d7 35. ♠c5 e5? Гораздо сильнее 35...♠b4, пользуясь связкой коня. 36. ♠c2 ♠d5. И снова непонятно, почему черные просто не забрали на b4. 37. ♠dd2 ♠b3 38. ♠a2 e4? Позиционная

ошибка – черные лишают себя возможности сыграть в будущем f4, разрушая прикрытие короля. 39. ♠c5 ♠b4 40. ♠e4? Ответная любезность. После 40. ♠dc2! f5 41. ♠a4 ♠a4 42. ♠c3 белые побеждают ввиду лучшей пешечной структуры на королевском фланге. Но... 40...b3 41. ♠ac2 ♠f8 42. ♠c5 ♠b5 43. ♠d3 a3 44. ♠f4 ♠a5 45. ♠a2 ♠b4 46. ♠d3 ♠h6 47. ♠d1 ♠a4 48. ♠da1 ♠d6 49. ♠g1 ♠b3 50. ♠e2 ♠d3 51. ♠d4 ♠h7 52. ♠h2.



52...♠e4? Серьезная ошибка, дающая белым возможность поиграть на победу, пожертвовав качество. Для ничьей черным достаточно «стоять на месте», сделав любой ход королем. 53. ♠a3! ♠h4+ Забирать ладью опасно ввиду слабостей на королевском фланге и отсутствия контригры. 54. ♠g1 ♠e4 55. ♠a4 ♠e5 56. ♠e2 ♠c2 57. ♠1a2 ♠b3 58. ♠g2 ♠d5+ 59. f3 ♠d1 60. f4 ♠c7 61. ♠f2 ♠b6 62. ♠a1 ♠b3 63. ♠e4 ♠g7 64. ♠e8 f5 65. ♠aa8 ♠b4 66. ♠ac8 ♠a5 67. ♠c1 ♠b6 68. ♠e5 ♠b3 69. ♠e8 ♠d5 70. ♠cc8 ♠h1 71. ♠c1 ♠d5 72. ♠b1 ♠a7 73. ♠e7 ♠c5 74. ♠e5 ♠d3 75. ♠b7 ♠c2 76. ♠b5 ♠a7 77. ♠a5 ♠b6 78. ♠ab5 ♠7 79. ♠f5! Единственный способ игры на выигрыш – забирая две пешки и слона в обмен на ладью, белые получают теоретически ничейный эндшпиль без риска проиграть, в то время как черные должны находить единственные ходы, что под силу только компьютерным програм-

мам. 79...♠d3 80. ♠f7+ ♠f7 81. ♠b7+ ♠g6 82. ♠a7 ♠d5 83. ♠a6+ ♠h7 84. ♠a1 ♠g6 85. ♠d4 ♠b7 86. ♠a2 ♠h1 87. ♠a6+ ♠f7 88. ♠f3 ♠b1 89. ♠d6 ♠g7 90. ♠d5 ♠a2+ 91. ♠d2 ♠b1 92. ♠e2 ♠b6 93. ♠c2 ♠b1 94. ♠d4 ♠h1 95. ♠c7+ ♠f6 96. ♠c6+ ♠f7 97. ♠f3 ♠b1 98. ♠g5+ ♠g7 99. ♠e6+ ♠f7 100. ♠d4 ♠h1 101. ♠c7+ ♠f6 102. ♠f3 ♠b1 103. ♠d7 ♠b2+ 104. ♠d2 ♠b1 105. ♠g1 ♠b4 106. ♠d1 ♠b3 107. ♠d6+ ♠g7 108. ♠d4 ♠b2+ 109. ♠e2 ♠b1 110. e4 ♠h1 111. ♠d7+ ♠g8 112. ♠d4 ♠h2+ 113. ♠e3 h4 114. gh ♠h3+ 115. ♠d2 ♠h4 116. ♠d3 ♠f8 117. ♠f3 ♠d8+ 118. ♠e3 ♠a5 119. ♠f2 ♠a7+ 120. ♠e3 ♠d7 121. ♠g3 ♠d2+ 122. ♠f3 ♠d1+ 123. ♠e2 ♠b3+ 124. ♠g2 ♠b7 125. ♠d2 ♠b3 126. ♠d5 ♠e7 127. ♠e5+ ♠f7 128. ♠f5+ ♠e8 129. e5 ♠a2+ 130. ♠h3 ♠e6. Проигрывающий ход. Компьютерные таблицы показывают, что черным необходимо играть 130...♠c2 или 130...♠b1, чтобы контролировать поле e4 и иметь в виду связку по диагонали e1-h4, не пуская короля белых вперед. Рассчитать такое за доской на восьмом часу игры не по силам даже гроссмейстеру экстра-класса. 131. ♠h4 ♠h6+ 132. ♠h5 ♠h7 133. e6! ♠g6 134. ♠f7 ♠d8 135. f5 ♠g1 136. ♠g7, и черные сдались, поскольку белый король убегает от вечного шаха на g8.

К сожалению, оправиться от такого тяжелого поражения российский шахматист не смог и допустил в следующих партиях ряд чудовищных ошибок, абсолютно не свойственных игроку такого уровня. Матч закончился досрочно со счетом 7,5–3,5.

Приближается новый год, и мы желаем Яну восстановиться силы и удачно выступить в новом турнире претендентов, который состоится следующим летом.

А. Русанов

Индекс 90964

СВЕТ И ТУМАН



Уроки с физикой

Оказывается, возможно наблюдать движение
даже отдельных капель тумана...



(ПОДРОБНЕЕ – НА С. 29 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)